onska.

002

I

6002/V

MS 6002/V

BIBLIOTH. UNIV.
JAGELLONICAE

1900. a. 98.

Algebra

BIBLIOTH. UNIV. JAGELLONICAE

Die Mathematik wird wie bekannt eingetheilt: in reine Mathematik und in angewandte Mathematik. Die erſtere hat es nur mit Vergleichung und Beſtimmung der Größe allein zu thun, ohne auf die übrigen Eigenſchaften zu ſehen. Die zweite Art der Mathematik iſt eine Anwendung der reinen Mathematik, und zieht außer der Größe auch noch die Eigenſchaften und phyſiſchen Beſchaffenheiten mit in Betrachtung. Die reine Mathematik theilt ſich in Geometrie und Arithmetik. Letztere beſchäftigt ſich mit unſtetigen (discreten) Größen nämlich ſolchen, die aus abgeſonderten und durch eigene Grenzen beſtimmten Theilen zuſammengeſetzt ſind; bei ihnen wird die Einheit zum Grunde gelegt und dann die Größe entſtehend gedacht wird. Dies können nun natürliche und Zahlen ſeyn. Stetige (continuirliche) Größen ſind Gegenſtände der Geometrie; dies ſind Größen deren Theile ununterbrochen aneinander hängen z. B. Linien, Flächen u. ſ. w.; jedes

Continuirliche Größen als eine discrete betrachtet.

können auch sie wie discrete Größen behandelt werden, wenn ich z. B. eine Linie in eine gewisse Anzahl Theile theile. Eine discrete Größe kann nun aber nur aus gleichartigen Dingen bestehen. Man macht den Begriff von Größe, in soferne nämlich die Größe einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, auch auf Kräfte anwendbar, und nennt sie intensive Größen im Gegensatz der extensiven nämlich solchen die aus gleichartigen Theilen zusammengesetzt sind; jedoch genau genommen kann man hierunter auch die Kraft zählen, indem man sie auch aus Theilen bestehend denken kann, und beliebig verstärkt oder vermindert werden kann.

Größen überhaupt können nun von zweyerley Beschaffenheit seyn. 1) Sie können ~~[illegible]~~ an sich gleichartig seyn, und 2) können sie von der Beschaffenheit seyn daß sie sich ganz oder zum Theil aufheben; und dies ist der Begriff durch den man entgegengesetzte Größen bezeichnet. Zur Bezeichnung nun sie von einander zu unterscheiden, nennen wir sie bejahende (positive) und verneinende (negative) Größen. z. B. Gewinn u. Verlust; Steigen und Fallen u. s. w. man sehe Pasquich I. §2. Willkürlich aber übrigens ist es welcher Art Größe ich die Beziehung + oder − gebe, und es ist sehr irrig wenn man glaubt z. B. nothwendig müsste Vermögen positiv und Schulden negativ genannt werden u. s. w., denn ich kann es ebensogut umgekehrt benennen, nur muß ich beobachten bei einer Rechnung der einmal angenommenen Beziehung treu zu bleiben.

Jede Größe nun betrachtet man in der Rechnung ursprünglich als positiv angenommen wenn nicht das Gegentheil gerade zu erfordert wird. Das mag wohl daher gekommen seyn daß man nicht unnöthiger Weise immer Zeichen schreiben wollte; daher schreibt man statt +12 immer nur schlechthin 12.

Addiren.

Entgegengesetzte Größen wie unentgegengesetzte Größen überhaupt behandeln heißt addiren.

Jede Zahl kann alſo wie oben erwähnt, nur aus =artigen Theilen beſtehen: ſo entſteht alſo +5 aus +1+1+1+1+1; und −5 aus −1−1−1−1−1, indem wir nämlich die vorher zum Grunde gelegte Beſchaffenheit in eine entgegengeſetzte Beſchaffenheit verwandelt. Soll nun 100 + 80 − 90 + 60 − 180 addirt werden, ſo wird man die Sache genau wie folgend ſo ſchreiben (100)+(+80)+(−90)+(+60)+(−180) wo die Zeichen + außer den Parentheſen ſtets nur das Operations=Zeichen, und die Zeichen in den Parentheſen die Beſchaffenheitszeichen vorſtellen. Da nun aber bei der Addition aus ihrem Begriffe hervorgeht, daß ſie entgegengeſetzte Größe wie entgegengeſetzte Größen überhaupt behandeln ſoll, ſo werd ich hier nichts zu thun haben als die gleichartigen poſitiven Zahlen zuſammen zu zählen, dasſelbe mit den negativen zu machen und dann gegen einander aufzuheben. Es hat nun aber die Größe nach einmal oder einzeln alle ſeine Theile beſitzt

Operations und Beſchaffenheitszeichen.

ist gleich, und in diesem Falle kann ich also die Operationszeichen ganz weglassen und mit den Beschaffenheitszeichen verwechseln.

Nun also 240 − 270 = −30.

Subtrahiren.

Die Subtraction ist vollbracht wenn ich die Zeichen des Subtrahenden in die entgegengesetzten verwandle, und dann die Größen wie entgegengesetzte Größen überhaupt behandle. also wenn ich die Zahl 7 von 12 abziehen soll so verstehe ich folgendergestalt.

$$\begin{array}{cccc} +12 & +12 & -12 & -12 \\ \underset{-}{\pm}7 & \underset{+}{-}7 & \underset{-}{\pm}7 & \underset{+}{-}7 \\ \hline +5 & +19 & -19 & -5 \end{array}$$

Strenge entwickelt müßte die Subtraction so dargestellt werden:

+12 −(+7) +12−(−7) −12 −(+7) −12 −(−7).

wenn ich nun aber wie das Beispiel sagt eine Größe von einer andern wegnehmen soll, so muß sie doch nothwendig in ihr enthalten seyn ich muß mir daher die Sache so denken

+12 = +12 +7 −7
+12 = +12 −7 +7
−12 = −12 +7 −7
−12 = −12 −7 +7 zuletzt kann

Es würde bei der allg: Subtr: Ausdruckes darauf zu sehen, daß durch die Verwandlung der Zeichen des Subtrahendus, und die darauf erfolgende Addition, die Subtr: wirklich geleistet wird. dieß [illegible] giebt die Erklärung der Subtr: wenn man sie als das Suchen des Ueberschusses der Minuend: über den Subtrah: ansieht. Es muß daher s in m ~~enthalten sein~~ enthalten verschwunden gemacht werden, um den Ueberschuß x, was der Rest sein wird hervorzubringen. dieses geschieht aber dadurch daß man s mit entgeg: Zeichen mit m verbindet. denn da s in m enthalten sein muß, weil m über s den Ueberschuß x hat, so wird s in m verschwinden, wenn man das ./. von s in m hineinlegt oder es damit verbindet

Ist s < m und von denselben [illegible] ist es wirklich in m enthalten, so daß m in s ± x zerlegt werden kann.

Ist aber s > m oder von entgegengesetzten dann kann es in m nicht wirklich enthalten sein sondern muß erst in m hineingelegt werden ohne m zu verändern m übergeht alsdann in

$m \pm s \mp s$

wo nun s wie es auch beschaffen ist verschwunden gemacht werden kann, und es bleibt als Rest oder Überrest $m \pm s$

Auch durch diesen Rest muss ein Minuendus gebildet werden, wenn der Subtrahend kleiner ist, der von demselben Rest wäre, ist $s = \pm a$ und soll dann entsprech. = vorigen Minuendus sein, muss man also setzen $\pm a \mp a$ an und lässt dann $\pm a$ verschwinden, woraus der Rest $\mp a$ sich entwickelt.

ich in allen vier Combinationen (mehrere sind dann nicht) die +7 u. −7 hinwegnehmen und ich erhalte dann für den ersten 2ten 3ten u. 4ten Fall, ebenfalls $+5 + 19 - 19 - 5$;

Bei der Subtraction muss ich wie aus obigem zu ersehen ist, das Operationszeichen − mit dem Beschaffenheitszeichen ja nie verwechseln.

Multiplication.

Eine Größe ist wie bekannt nur einer Vermehrung oder Verminderung fähig. Die Vermehrung aber kann auf eine doppelte Art geschehen; einmal kann ich sie um etwas Ungleiches vermehren (addiren) ein andermal kann ich sie um etwas Gleiches, und zwar dadurch vermehren dass ich sie selbst zu sich addire. Dies giebt den Begriff von der Multiplication. Diese Vermehrung macht nun zwar im Wesen nichts verschiedenes aus, wohl aber in der Form, denn Multiplication ist weiter nichts als eine fortgesetzte Addition immer und derselben

Zweÿte.

Jede benannte Zahl kann nur mit einer unbenannten Zahl und nicht wieder mit einer benannten Zahl multiplicirt werden z.B. 10 Gulden kann ich nur 3 mal nicht aber 3 Gulden mal nehmen.

= demnach ergiebt sich, daß wenn mit benannten Größen multiplicirt wird, der multiplicator immer dem multiplicandus nicht entgegengesetzt werden kann. Wenn der multiplicandus eine benannte Zahl ist, so ist es auch das product und zwar von derselben Benennung, so daß die Benennung des multiplicandus gar nicht in Rücksicht genommen werden darf. —

Folgende Fälle können nun in der Multiplication vorkommen, wo Zahlen durch die ihnen vorgesetzten Zeichen natürlich zugleich ihre Beschaffenheit erhalten haben.

+12	+12	−12	−12	mit
+5	−5	+5	−5	

Um nun für alle diese Fälle eine richtige Regel besonders in Rücksicht auf ihre Zeichen zu erhalten, müssen wir die Sache folgender Gestalt betrachten. Wir nehmen hierbei an, daß die obere Zahl 12 als der Multiplicator, wenn er mit der absoluten Zahl +5 multiplicirt wird, sein einmal gehabtes Zeichen beibehalte, und schließen dann: daß wenn +5 einen positiven Erfolg in Rücksicht auf den Multiplicandus äußert, so

hieraus entsteht die Einsicht schon aus einer bestimmten definition der Multiplication muß −3 nothwendig das Gegentheil hervorbringen und das also für diesen Fall +bc −bc −bc +bc, und allgemein:

Daß gleiche Zeichen ein positives Product ungleiche Zeichen ein negatives Product geben.

Division.

Der Ausdruck ist falsch, denn die Benennung des Divisors muß im Ausdruck nicht [illegible] denn 12 [illegible] nicht in 4 Lande, sondern in 4 = Theile zerlegen. Das Resultat hat daher immer die Benennung des Dividenden, und dem ausgeführten Resultate ist die Benennung nur [illegible] [illegible]

Wir können in benannten Zahlen in benannte zerlegen in ~~unbenannte~~ ungleichartige Größen der Einheiten. Ich kann z. B. fragen: wie oft sind 3 x in 15 x enthalten und ich erhalte zur Antwort eine ungleichartige Zahl. Anders kann ich fragen: wie viel ist der 3te Theil von 15 x und ich erhalte zur Antwort eine benannte Zahl. Wenn zu dividiren ist, wo wir den

+12 : +3 =
+12 : −3 =
−12 : +3 =
−12 : −3 =

Dürfen 3 als eine abstracte Zahl annehmen, um eine [illegible] Zahl zum Quotienten zu erhalten, so entsteht die Frage, ob wir bei der [illegible] die + Division ~~[illegible] und~~ [illegible] aber zu denken wie es ist, [illegible], oder vielleicht zum Quotient, nehmen wir nun an zuständig? an der er ihr gestellt wird wie er da steht; so

$+12 : +3 = +4$ ist dieselbige richtig, und
$+12 : -3 = -4$ denselben Grund wie bei
$-12 : +3 = -4$ der Multiplikation, denn
$-12 : -3 = +4$ auch hier ist nothwendig die

-4 eine entgegengesetzte Wirkung von der $+4$ hervorbringen.

Da nun wir bekannt die Multiplikation des Quotienten mit dem Divisor, den Dividendus wieder zum Vorschein bringen muss, so wird man sich sehr leicht von der Richtigkeit der Regeln überzeugen.

Ueber den Ausdruck $-a < 0$. Mitte 16 [illegible]

Positive und negative Größen sind wie wir gesehen haben in Absicht auf Zeichen ganz willkürlich, der Übergang der Größen in einander geschieht aber immer durch 0, und in diesem Sinn können wir die eine Größe in Beziehung auf die andere weniger als 0 nennen. Um dies nun aber ein und dies sehende Beispiele zu ersehen ist positive und negative

$$\begin{array}{r} +3 \\ -1 \\ \hline +2 \\ -1 \\ \hline +1 \\ -1 \\ \hline 0 \\ -1 \\ \hline -1 \\ -1 \\ \hline -2; \end{array} \qquad \begin{array}{r} -3 \\ +1 \\ \hline -2 \\ +1 \\ \hline -1 \\ +1 \\ \hline 0 \\ +1 \\ \hline +1 \\ +1 \\ \hline +2 \end{array}$$

Größen bezeichnen, und also dient es nur dem Übergang der einen in die andere an. Eine Größe nun die kleiner als Nichts in philosophischer Hinsicht genannt, ist ein Unding; die negativen Zahlen hat man einmal als solche angenommen, ~~und daher~~ denn die, je ihrer größer sind je weniger gelten sie über z.B. $-7 > -15$; $+7 < +15$, und deshalb kann man auch schreiben $-b < +a$; $a < a+b+c$. Der Ausdruck $-b < 0$ entsteht übrigens folgendermaßen:

$$\begin{array}{r} a < a+b \\ -a-b = -a-b \\ \hline -b < 0 \end{array}$$

Dies ist aber nur ein Scheinbeweis, und man muß denken daß der Subtrahendus a als von ihm a+b abgezogen wurde erst durch a Null werden mußte, und das von a kein Theil mehr da ist, mithin $-b$ nichts von a hat also weniger als 0 ist.

Buchstaben-Rechenkunst.

Die Zahlen-Rechenkunst ist diejenige Disciplin die uns lehrt wie Zahlen Größen nach gewissen Regeln verändert werden müssen. Die Buchstabenrechenkunst ist dagegen diejenige Disciplin, die uns lehrt wie ~~Zah~~ Buchstabengrößen wechselseitig verändert werden müssen. Die Buchstabenrechnung behält ihre Elemente bei und ändert nur alle Formen der Rechnung um, da hingegen die Zahlenrechnung die Zahlen wirklich nach dem Zahlensystem verändert.

Zeichen der Addition +, $a+b$.
— Subtraktion −; $a-b$ d.h. $a-(+b)$
— Multiplikation × u. ·; $a\times b$; $a.b$, u. ab; $abcd$ nicht $adcb$;

Zeichen d. Division : $a:b$ oder $\frac{a}{b}$. Die Bruchform ist die vortheilhafteste weil einige Mathematiker auch das Zeichen : nur bei Verhältniß brauchen.

Die Buchstabengrößen sind nun entweder einfach als a; b; c; oder sie sind zusammen-

$\frac{1}{73000}$

gesetzt als: $a+b+c+d$; solche Größen schließt man, so wie man eine Operation mit ihnen vornehmen will in eine Parenthese; ersetzt man die Parenthesen der Operationszeichen als $(a+b)-(a-b+c-d+f)$, und $(a+b)\times(c+d) = (a+b).(c+d) = (a+b)(c+d)$; nicht $= a+b(c+d)$, denn das giebt einen ganz anderen Sinn.

Ueberhaupt ist es sehr nöthig daß man sich mit den Formen: d. h. der Art wie die Größen ausgedrückt sind bekannt mache, und hernach für sich die besten wähle. Zu setzen die Klammern u. Parenthese in einander folgenden vorzuziehen sind $[[()\cdot()]\cdot[]]$; Unterscheiden muß man $\overset{3}{a}$ und a^3 denn $\overset{3}{a}$ zeigt die Stelle im Zehnersystem an z. B. $\overset{3}{5} = 5000$; $\overset{-3}{5} = \frac{1}{5000}$; $\overset{-4}{73} = 0,00073$ a^3 dagegen die Dignität $5^3 = 5.5.5 = 125$; (§10). Ein Produkt also was aus mehreren gleichen Factoren besteht ist eine Dignität oder Potenz. Die Zahl welche anzeigt wie oft die Größe als

als Factor eingesetzt ist, heißt der Exponent der Dignität. a^2; a^3; a^4; … a^m; $(a+b)^m$;

Der Multiplikator zeigt immer (in [illegible])

a^m kann man sich vorstellen daß die Einheit mit a. m mal multiplizirt wird; also $a^m = \overset{m\,mal}{aaa\ldots a} = 1.\overset{m\,mal}{aa\ldots a}$.

die Einheit steht also hier m mal in der Dignität.

a^{-m} zeigt an daß mit der Einheit die entgegengesetzte [illegible] geschehen ist, nämlich kann also hier nur [illegible] in einer Division [illegible] also a^{-m} muß $=$ zeigen $\frac{1}{\underbrace{aa\ldots a}_{m\,mal}}$;

Da +1 und −1 durch 0 durchgeht so muß $a^0 = \frac{a^1}{a^1}$ ‖ $= 1$ seyn.

Operationen mit Potenzen

den 27. Juli 36 repetirt.

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ denn $\overset{m\,mal}{aaaa\ldots a} \cdot \overset{n\,mal}{aaaa} = a^{m+n}$.

$$I\; a^m \cdot a^n = a^{m+n};$$

$\frac{a^8}{a^3} = \frac{\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}aaaaa}{\cancel{a}\cancel{a}\cancel{a}} = 1.aaaaa = a^5 = a^{8-3}$;

$$II\; \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

Bei dieser Gelegenheit können wir etwas über den negativen Exponenten erfahren, indem wir ihn zu entstehen [illegible] können. $\frac{a^5}{a^8} = \frac{aaaaa}{aaaaaaaa} = a^{5-8} = a^{-3} = \frac{1}{a^3}$.

$$III\; a^{-m} = \frac{1}{a^m};$$

dies giebt uns ein Mittel an die Hand ~~und~~ aus einem Ausdruck negative Exponenten zu entfernen;

denn es ist $d^{p-q+r-s} = d^{p+r-q-s} = d^{(p+r)-(q+}$

$d^{p+r} \times \frac{1}{d^{q+s}} = \frac{d^{p+r}}{d^{q+s}}$.

Uebrigens muss man sich nur bedenken daß s^{-3} nur eine Schreibform ist, und daß nur ein Ausdruck s^{3} dieses anzeigen und ausführen ist, demungeachtet sind die negativen Exponenten sehr bequem indem sie die Rechnung in manchen Fällen sehr erleichtern, man muss aber eine gründliche Lehre davon einem wichtigen Teil unterlegen und wir denken daß es diesem die Einheit durch die Eigenschaft selbst entstanden ist. Der Ausdruck a^0 ist auch nur eine Schreibform wird aber wie wir in der Folge sehen werden bei den Logarithmen sehr merkwürdig indem wir dadurch jede Grundzahl eines Systems auf 1 zurückführen können:

$\text{II}'\ a^0 = 1.$

$a^0 = a^m : a^m = a^{m-m} = a^0 = 1.$

Einige hierher gehörige Beispiele:

$\frac{a^2b^3}{cf^4} - \frac{1}{a^3b^2} = a^2b^3c^{-1}f^{-4} - a^{-3}b^{-2}$;

$a^2b^{-1}c^3b^{-4} - a^{-1}b^{-3} + cd^{-2} = \frac{a^2c^3}{b^5} - \frac{1}{ab^3} + \frac{c}{d^2}$

Was jetzt aber von positiven Exponenten gesagt ist gilt auch von negativen; und sagt Meyerhirsch in Beisp. 8 .... Stück 28;

$$a^n \cdot a^{-m} = \frac{a^n}{a^m}.$$

denn $a^n \cdot a^{-m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m}$.

$$a^n : a^{-m} = a^{n-(-m)} = a^{n+m};$$ denn

$$a^n : a^{-m} = a^n : \frac{1}{a^m} = \frac{a^n \cdot a^m}{1} = a^{m+n};$$

4t Zusatz. zeigt die Potenz von Brüchen.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \overset{m\text{ mal}}{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}} = \frac{aaa\ m\text{mal}}{bbb\ m\text{mal}} = \frac{a^m}{b^m}$$

Dies würde man auch als Hauptregel aufstellen, allein ich möchte die Regeln zu sehr anhäufen, und sie ist wie alle folgenden Lehrsätze sich auf die hier angegebenen Hauptregeln zurückführen.

Aus obigem Behandeln der Brüche ist es klar daß Potenzen echter Brüche immer kleiner werden je höhere Potenzen sie sind, so daß man am Ende sie als ganz klein unbeachtet lassen kann.

Soll man Potenz wieder zur Potenz erheben so multiplicirt man die Exponenten.

$$(a^m)^n = a^{mn};\quad (a^3)^4 = aaa\cdot aaa\cdot aaa\cdot aaa.$$

12.

$I^r. (a^m)^n = a^{mn}$; $= a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^{3+3+3+3} = a^{3 \cdot 4}$
$= a^{12}$;

$(a.b)^3 = ab.ab.ab = aaa.bbb = a^3.b^3$

Wenn ein Produkt potenzirt werden soll, so wird jeder einzelne Faktor zur verlangten Potenz erhoben:

$(a^m b^n c^p \dots z^r)^3 = (a^m b^n c^p \dots z^r) \times (a^m b^n c^p \dots z^r) . (a^m b^n c^p \dots z^r) = a^m a^m a^m . b^n b^n b^n . c^p c^p c^p \dots z^r z^r z^r = a^{3m} . b^{3n} . c^{3p} \dots z^{3r}$.

So ist also $(a^3 b c^5)^4 = a^{12} b^4 c^{20}$;

Die Schreibart $(a+b+c)^3$ ist nicht bei allen Mathematikern gleich sondern einige schreiben $\overline{a+b+c}^3$; die Multiplikation drücken sie z. B. in 2 Parenthesen so aus $\overline{a+b+c} \times \overline{d+f}$.
die Division z. B.: $\overline{a+b+c} \div \overline{d-f}$; Ältere englische Schriftsteller haben das Zeichen ÷ auch bei der Subtraktion gebraucht.

§11. 2 Abschnitt.

Von den Wurzelgrößen

Die Wurzel einer Zahl A heißt eine Zahl a welche mehreremal mit sich selbst multiplicirt die Zahl A wieder zum Vorschein bringt.
Wurzelexponent ist diejenige Zahl welche anzeigt wie viel mal die Zahl a genommen werden soll

um die Zahl A selbst hervorzubringen. Es ist daher $\sqrt[m]{a}$ = mte Wurzel aus a.

Wurzelausziehen heißt also eine gewisse Größe in so viel Faktoren zerstellen, als der Wurzel-Exponent anzeigt.

Auch hier hat man 2 Schreibarten $\sqrt{(a+b+c)}$ und $\sqrt{a+b+c}$; die letztere ist vorzuziehen. Überhaupt muß man sich hier besonders eine sehr deutliche Schreibart angewöhnen, denn: $\frac{\sqrt{a}}{b}$ ist nicht $= \sqrt{\frac{a}{b}}$ und nicht gleich $\sqrt[a]{b}$;

Gleichnamige Potenzen oder Wurzelgrößen [illegible] sich nur nach ihren Exponenten [illegible]. a^m u. a^n sind ungleichnamige, dagegen sind a^r u. b^r gleichnamige Potenzen; $\sqrt[m]{a}$ u. $\sqrt[n]{a}$ sind ungleichnamig, dagegen $\sqrt[m]{a}$ u. $\sqrt[m]{b}$ sind gleichnamige Wurzelgrößen.

$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ hier muß man [illegible] die Richtigkeit [illegible], als wenn ab [illegible] die Potenzirung; wird bewiesen durch Zahl. $\sqrt[3]{\frac{343}{729}} = \frac{\sqrt[3]{343}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{7}{9}$;

$\sqrt[n]{abc\ldots p} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\cdot\sqrt[n]{c}\ldots\sqrt[n]{p}$, weil

1) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

2) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$.

man sich jeden Faktor unter dem √ Zeichen, so entstanden denken muß aus einer andern Größe die in die n^te Potenz erhoben worden ist. denn bei dem Ausdruck $\sqrt[3]{343}$ ist die Zahl 343 aus einer andern entstanden die in die 3te Potenz erhoben worden ist, und zwar hier aus 7. denn $(7)^3 = 343$.

Gleichnamige √ Größen werden multiplicirt wenn man die Größen unter dem √ Zeichen multiplicirt. das ist für die Anwendung ein sehr wichtiger Satz:

VI $\sqrt[m]{a}\cdot\sqrt[m]{b}=\sqrt[m]{ab}$

$\sqrt[m]{a^n}\cdot\sqrt[m]{a^m}=\sqrt[m]{a^{n+m}}$

$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{64}=4$, und wie aus vorstehenden Beispiel zu ersehen ist kann man irrationale Größen hierdurch rational machen.

§15. kann [illegible] behandelt werden soll ~~aus~~ $\sqrt[3]{a^{12}}$ gezogen werden d. h. also die Größe a^{12} soll in 3 gleiche Faktoren zerfällt werden. so wird also sagen $a^m\cdot a^m\cdot a^m =$ a^{3m} wo $3m = 12$ und also $m = 4$ ist. Rückwärts [illegible] ist $a^4a^4a^4 = a^{4+4+4}$ $= a^{3\cdot 4} = a^{12}$. d. h. also ich dividire den Exponenten der Potenz unter dem Zeichen durch den √ Exponent: also $\sqrt[5]{b^{30}} = b^{\frac{30}{5}} = b^6$; $\sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4$, im letzteren Beispiele ist es also deutlich, daß eine Größe zu einer Potenz erhoben sein kann und doch aus ihr die Wurzel gezogen werden soll. Hieraus können wir nun auch schließen daß wir ~~Anfangsbr~~ gebrochene Exponenten haben können, jedoch sind sie nicht Anschauungsformen sondern nur Schreibformen. z.B. $8^{\frac{2}{3}}$. die 8 in die Potenz $\frac{2}{3}$ unmittelbar zu erheben ist nicht möglich. man bedient sich dieser Form der gebrochenen Exponenten bei Rechnungen aber sehr oft mit großem Vortheil $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

VII $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$;

Seite 36. Zus. 1. u.s.w.

Wurzelgrößen werden zu Dignitäten erhoben wenn man die Größe unter dem √ Zeichen zur Potenz erhebt: $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^2 = \sqrt[3]{5^4} = 5^{\frac{4}{3}}$.
denn $\left(\sqrt[3]{5^2}\right)^2 = \left(5^{\frac{2}{3}}\right)^2 = 5^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{5^4}$.
$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = a^{\frac{mr}{n}} = \sqrt[n]{a^{mr}}$.

VIII $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^r = \sqrt[n]{a^{mr}}$

Von negativen gebrochenen Exponenten gilt desgleichen: es ist $\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = a^{-\frac{m}{n}}$

Für diesen Ausdruck giebt es nun 3 Schreibarten 1) $a^{\frac{-m}{n}}$; 2) $a^{-\frac{m}{n}}$, 3) $a^{\frac{m}{-n}}$; welche wie leicht aus der [illegible] [illegible] der veränderten – Zeichen, als negativen Exponenten, einander gleich sind wovon aber die beiden ersten nur zu brauchen, die letztere aber ~~ihre~~ weil sie unschicklich zu erkennen ist, denn bei ihr bezieht sich das – zu den Zeichen welches das der Wurzelexponent hat ist, es darf nicht der nothwendig eine absolute Zahl sein:

$$\frac{a^2b^3}{\sqrt[4]{c^3}} = a^2b^3c^{-\frac{3}{4}}.$$

Ferner ist $a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{-m}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}} = \frac{a^{\frac{m}{n}}}{1} = a^{\frac{m}{n}}$; desgleichen ist aber auch.

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{-m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^{-m}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a^m}}}.$$

$$= \frac{1}{\frac{\sqrt[n]{1.}}{\sqrt[n]{a^m}}} = \frac{\sqrt[n]{a^m}}{\sqrt[n]{1}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{1} = a^{\frac{m}{n}};$$

$$\frac{1}{\sqrt[n]{1}} = \frac{1}{1^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\frac{1}{1^{-\frac{1}{n}}}} = 1^{-\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{1^{-1}}$$

$$= \sqrt[n]{\frac{1}{1}} = \sqrt[n]{1}$$

und $\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[n]{1} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

Auf diese Art kann man nun leicht jeden algebraischen Ausdruck auch in Brüche ver-

verwandeln wo man einen beliebigen Factor aus
Nenner hinauf setzen kann. zB: $a^2 b^{\frac{3}{4}} c^3 =$

$$= \frac{a^2}{b^{-\frac{3}{4}} c^{-3}} \;;$$

ad Zusatz 4.

$$\left(a^{-\frac{2}{3}}\right)^5 = \left(\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}}\right)^5 = \frac{1^5}{a^{\frac{10}{3}}} = \frac{1}{a^{\frac{10}{3}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{a^{10}}} = \sqrt[3]{a^{-10}} = a^{\frac{-10}{3}} \;;$$

Zusatz 6.

Soll eine Wurzelgröße zu einer Dignität erhoben werden, so dividire ich mit dem Exponent der Dignität in den √ Exponent, und behalte den Quotient als √ Exponent bei.

$$\left(\sqrt[6]{a^5 b^2}\right)^3 = \left(a^5 b^2\right)^{\frac{3}{6}} = \left(a^5 b^2\right)^{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}} = \left(\left(a^5 b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{3}{3}}$$

$$= \sqrt[3]{\left(\left(a^5 b^2\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3} = \left(a^5 b^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a^5 b^2} \;;$$

Wenn daher aus einer Größe eine √ auszuziehen ist, deren Wurzel Exp. sich in Factoren zerstellen läßt, so kann man dafür eine wiederholte √ Ausziehung substituiren daß jeder der √ Exponenten ein Factor des gegebenen √ Exp.

zB: $\sqrt[24]{b} = \sqrt[2.2.2.3]{b} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{b}}}}$.

Zusatz 9. 38te Seite.

$\underline{\sqrt[n]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^r} = \sqrt[ns]{a^{ms+nr}}}$ denn es gilt

$$\left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^r = a^{-\frac{mr}{n}}$$

$$\left(\sqrt[a]{m}\right)^b = \left(m^{\frac{1}{a}}\right)^b = m^{\frac{b}{a}} = \sqrt[a]{m^b}$$

alſo $\underline{\left(\sqrt[a]{m}\right)^b = \sqrt[a]{\left(m^b\right)} = m^{\frac{b}{a}}}$

$$\left(\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2}\right)^8 = \left(\sqrt{a^3 b^2}\right)^2 = \sqrt{a^6 \cdot b^4} = a^3 \cdot b^2$$

IX

$$\underline{\sqrt[b]{\left(\sqrt[a]{m}\right)} = \sqrt[ab]{m}}$$

$$\underline{\sqrt[b]{\left(\sqrt[a]{m}\right)} = \overset{\text{mal}}{\sqrt[b]{m^{\frac{1}{a}}}} = \sqrt{m^{\frac{1}{ab}}}} = \sqrt[ab]{m}$$

$$\sqrt[r]{a^m} \cdot \sqrt[s]{a^n} = a^{\frac{m}{r}} \cdot a^{\frac{n}{s}} = a^{\frac{m}{r}+\frac{n}{s}} =$$

$$a^{\frac{ms+nr}{rs}} = \sqrt[rs]{a^{ms+nr}}$$

$$\sqrt[n]{a^m}\cdot\sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}$$
$$= a^{\frac{ms+rn}{ns}} = \sqrt[ns]{a^{ms+rn}}.$$

Wollte man aber vielleicht hier die Frage aufwerfen ob sich die Dignität nicht geändert habe wenn man Zähler und Nenner mit einerlei Zahl multipliciren oder dividire, so betrachte man folgendes:

$$a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{mr}{nr}} \text{ denn}$$
$$a^{\frac{mr}{nr}} = \sqrt[nr]{a^{mr}} = \sqrt[nr]{(a^m)^{r}} =$$
$$(a^n)^{\frac{r}{nr}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ mit r multiplicirt $= a^{\frac{m\cdot r}{nr}}$
$$= a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{r}{r}} = a^{\frac{m}{n}\cdot r\cdot\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r} = a^{\frac{m}{n}};$$

Für die Division
$$a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}-\left(-\frac{r}{s}\right)} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}} = \sqrt[ns]{a^{ms+n}}$$

denn es ist $a^{\frac{m}{n}} : a^{-\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}} : \frac{1}{a^{\frac{r}{s}}}$
$$= \frac{a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{r}{s}}}{1} = a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{r}{s}}.$$
$$= \sqrt[ns]{a^{ms+nr}}. \quad ; \text{———}.$$

Cf. pag. 93.

§16.

Begriff von Koeffizient $8a$; $7b$.

§17.

Einfache Größen abc^2; zusammengesetzte durch + o. − getrennt als $abc + d - f$..

§18.

Gleichartig sind Größen wenn sie einerlei Buchstaben und einerlei Buchst. Exponenten haben als $3a^2b$ u. $5a^2b$; $8a^3b^{-\frac{1}{2}}$ u. $4a^3b^{-\frac{1}{2}}$;

ungleichartig sind sie wenn genanntes nicht gleich ist als, a^2b u. a^2b^{-3}; —

§19.

Addition.

Nur gleichartige Größen können wirklich addirt werden die übrigen ungleichartigen Größen kann man nur wie sie ausgedrückt sind, neben einander schreiben z.B.

$$-ac^2 - ac^2 - ac^2 - ac^2 = -4ac^2$$

und $ac^2b + ac^2b + ac^2b = 3ac^2b$.

Die Koeffizienten muß man sich daher so entstanden denken, daß gleiche Größen als der Koeffizient Einheiten hat, zu einander addirt wurden, und.

$$8a^2b + ad^2 - a^2c^2 - 4a^2b - 7ad^2 + 7a^2c^2 + md^2f - nd^2f$$
$$= 4a^2b - 6ad^2 - 6a^2c^2 + (m-n)d^2f,$$

im letzten Ausdruck $(m-n)d^2f$ ist eigentlich eine Zerlegung in Fac. unzeitig angebracht, denn diese ist schon ein Zerfallen in Factoren und die gehört eigentlich zur Division.

Subtraction.

Ich schreibe die Größen untereinander und ändere die Zeichen des Subtrahendus um, sodann addire die gleichartigen Größen, und die Subtraction ist verrichtet.

$$6a^2c - 5ad^3 - 6xy + y^3 - z^4$$
$$\underline{\pm 4a^2c \mp 5ad^3 \mp 8xy \mp 3y^3} \pm 2z^4 \mp 8v.$$
$$2a^2c \quad * \quad + 2xy + 4y^3 - 3z^4 + 8v.$$

Das Sternchen ist ein Zeichen der Aufmerksamkeit, und zeiget an, daß eine Größe hier weggefallen ist.

Das Untereinandersetzen der Größen beim Subtrahiren, was aus der Rechnung mit Zahlen entlehnet ist, ist nicht immer anwendbar, daher ist es zweckmäßiger wenn man die Größen des Subtrahendus und Minuendus in einer Reihe schreibt, und sie durch Parenthesen trennt, und setzt vor die Parenthese des Subtrahendus das subtrahirende Zeichen —, welches anzeigt, daß die Parenthese gemacht werden muß, also:

$$(6a^2c - 5a^3d - 6xy + y^3 - z^4) - (4a^2c\,5a^3d - 8xy - 3y^3 + 2z^4$$

wo das Zeichen — vor der Parenthese hier nicht Beschaffenheits- sondern Operationszeichen z.B.; will ich nun dies und die Parenthese hinwegschaffen so muß ich wirklich die Subtraction vollziehen, d.h. ich muß die Zeichen sämtlich umkehren; und da die Stelle bei den Buchstaben nichts ändert mit ihren Zeichen so mögen sie stehen wie sie wollen. Zuweilen kann man auch oft ein entgegengesetztes Teil einführen; daß man nämlich Größen mit umgekehrten Zeichen zu haben wünscht weil man sie grade braucht. In diesem Falle darf man nur diese Größen in eine Parenthese schließen, vor sie das Zeichen Minus setzen u. alle Zeichen der Größen in der Parenthese in die entgegengesetzten verwandeln, und bleibt [illegible] [illegible]. z.B.

$$a^2 - b + 3ac - ad + 15ad^3 = a^2 - b - (-3ac + ad - 15ad^3)$$

Multiplication.

Hier können 3. Fälle vorkommen: Es können multipliciert werden: 1) einfache Größen mit einfachen. 2) einfache mit zusammengesetzten Größen, & 3) Zusammengesetzte mit zusammengesetzten Größen.

Man bringe erst die Zeichen in Richtigkeit, multiplicire dann die Coefficienten und schreibe dann die Buchstaben beider Größen nach dem Alphabet geordnet neben einander, den gleichen Buchstaben addirt man ihre Exponenten;

$4ab \times 5cd = 20abcd;$

$7a^2b^3 \times 9a^4bc^2 = 7.9.a^2a^4b^3bc^2 = 63a^6b^4c^2;$

die Multiplication einfacher Größen mit zusammengesetzten deutet man gewöhnlich so an:

$4ab^3(3b^2c - 8a^4bd + 2abc)$

Hierbei ist aber die Multiplication bloß angedeutet d.h. ich soll die ganze Parenthese d. $4ab^3$ multipliciren. Soll nun aber die Multiplication ausgeführt werden, so muß ich die Größen von der Parenthese, d.i. jede einzelne Größe in der Parenthese mit aber multipliciren. Dies geschieht wie unten. Bei Zahlen geht man der Multiplication [illegible], bei Buchstaben aber ist die Regel [illegible] gemacht sind von die Ersten [illegible] zu schreiben. z.B. : =

$$\begin{array}{l} 5ab^2c - 8a^4bd + 2bc \\ 4ab^3 \\ \hline 20ab^5c - 32a^5b^4d + 8ab^4c. \end{array}$$

Wollte man nun fragen: Warum muss ich den Multiplicator mit allen Theilen des Multiplicandi multipliciren? Zum Beweise und Antwort folgendes. Wenn ich 12 × 5 nehmen soll, so muss ich jede Einheit die in der 12 steckt 5 mal nehmen die Zahl 12 kann ich nun ab- und ausdrücken durch 19 − 10 + 3, ich werde also hier alles mit 5 multipliciren und dann algebraisch addiren. Nehme ich nun die 19. 5 mal so habe ich 7 Einheiten zu viel genommen, nehme ich dann 10 . 5 Einheiten ab so habe ich 3 . 5 Einheiten zu viel weggenommen diese thue ich nun wieder 3 . 5 zu. also $19.5 = 95 - 5.10 = 45 + 3.5 = 60$. $= 5.12$.

Zusammengesetzte mit Zusammengesetzten Größen.

Hier findet man 3 fache Ausdrucks Art der Multiplication statt. Wenn zum Exempel 1) $(3a^2b + 2a^3c - 4bc^2)(3ab - 2a^3c - 6bc^2 - ac^4)$; multiplicirt werden soll so kann man es

~~[illegible]~~ deutlich zu auszudrücken: also.

$(3a^2b+2a^3c+4bc^2)(3a^2b-2a^3c+6bc^2-ac^4)$

setzt man nun $(3a^2b-2a^3c+6bc^2-ac^4)=m$ = dem Multiplicandus, so ist es = $3a^2bm+2a^3cm+4bc^2m$; setzt man nun statt m den Werth so erhält $3a^2b(3a^2b-2a^3c+6bc^2-ac^4)+2a^3c(3a^2b-2a^3c+6bc^2-ac^4)+4bc^2(3a^2b-2a^3c+6bc^2-ac^4)$.

Setzt man aber nun den Multiplicator = n ~~[illegible] also~~

$(3a^2b+2a^3c+4bc^2)=n$.

$3a^2bn-2a^3cn+6bc^2n-ac^4n$; setzt man den Werth so erhält: $3a^2b(3a^2b+2a^3c+4bc^2)-2a^3c(3a^2b+2a^3c+4bc^2)+6bc^2(3a^2b+2a^3c+4bc^2)-ac^4(3a^2b+2a^3c+4bc^2)$

Wenn aber die Multiplication wirklich vollzogen werden soll, so geschieht dieß dadurch, daß man unmittelbar jeden einzelnen Theil des Multiplicators mit den einzelnen Theilen des Multiplicandus durchmultiplicirt, oder dieß man nur als 2 Operationen [illegible] [illegible] vorstellt. Das ist aber weiter nichts endet als das erste gesetzt. Zu diesem Zweck stellt man sie untereinander wie folgt:

$$\begin{array}{l} 3a^2b - 2a^3c + 6bc^2 - ac^4 \\ \underline{2a^2b + 2a^3c - 4bc^2} \\ 6a^4b^2 - 4a^5bc + 12a^2b^2c^2 - 2a^3bc^4 \\ 6a^5bc - 4a^6c^2 + 12a^3bc^3 - 2a^4c^5 - \\ -12a^2b^2c^2 + 8a^3bc^3 - 24b^2c^4 + 4abc^6. \end{array}$$

Nun ist die Multiplikation im strengsten Sinne vollzogen. Wären es Zahlen, so müßte man nun alle Produkte hier addiren, das läßt sich nun auch mit Buchstaben thun wenn nämlich gleichnamige darunter sind um sie abzukürzen. Um nun diese gleichartigen Partialprodukte zu suchen wenn sie vorhanden sind, verfahre man wie unten, und denke sich das Produkt in lauter Parallelogramme getheilt. (Allgemein muß man auch die Produkte so untereinander schreiben, wie hier, da nicht klar wie man [illegible] gleich gleichartige Produkte zu suchen, weil das Vermögen geben kann). In diesen Parallelogrammen werden nun immer die gleichartigen Produkte, an den gleichliegenden Stellen und [illegible] eingestellt [illegible] worden [illegible] Lage haben wir:

$$\begin{array}{l|l|l|l|l}
a^2 & -ab & +ac & +ad & -ae \\
ab & -b^2 & +bc & +bd & -be \\
-ac & +bc & -c^2 & -cd & +ce \\
-ad & +bd & -cd & -d^2 & +de
\end{array}$$

$$a-b+c+d-e$$
$$a+b-c-d$$

$$= a^2-b^2+2bc-c^2+2bd-2cd-d^2-ae-be+ce,$$

die in den Winkelspitzen der □ stehenden Größen sind natürlich immer allein, und haben keine gleichartigen Größen mehr.

Hier habe ich nun jeden einzelnen Theil des Multiplicandus mit jedem einzelnen Theil des Multiplicators combinirt, aber ich kann das auch umgekehrt sagen.

Wenn wir nun bei einem Producte die Gleichartigkeit einzelner Theile voraussetzen, so können wir sagen, das Product besteht aus solchen Gliedern, welche Combinationen jedes einzelnen Gliedes des Multiplicators mit jedem einzelnen Theile des Multiplicandus und auch mit sich selbst enthalten.

Nach diesen einfachen gleichartigen Größen kann man nun auch zusammengesetzte nehmen.

3f. $\frac{6a^4}{b} - \frac{2c^2}{ab} + \frac{b}{4c^3} - 2d^4$

$\frac{2a^2}{b^2} + \frac{4c}{a}$

$$\frac{12a^6}{b^3} - \frac{4ac^2}{b^3} + \frac{2a^2}{4bc^3} - \frac{4a^2d^4}{b^2}$$

$$\frac{24a^3c}{b} - \frac{8c^3}{a^2b} + \frac{b}{ac^2} - \frac{8cd^4}{a}$$

Hier ist nun die Multiplication geschehen, weil nichts aufzuheben ist; gesetzt aber man hätte ein ähnliche Brüche wie $\frac{3ac^2}{4b} - \frac{2ac^2}{5b}$ so kann man sie trotz ihrer Verschiedenheit der Coefficienten sie vereinigen und in $\frac{7ac^2}{20b}$ zu verwandeln.

§22. Division

Auch sie kann 3facher Art seyn.
1) Einfache Größen durch Einfache
2) Zusammengesetzte durch Einfache
3) Zusammengesetzte durch Zusammengesetzte.

Die beste und gewöhnlichste Schreibform der Division ist Dividend durch Divisor durch einen liegenden Strich zu trennen wie $\frac{8ac}{5bd}$ jedoch pflegt man auch so zu schreiben $(8ac):(5bd)$.

Hat man nun 2 einfache Größen zu dividiren so sieht man ob sie sich abkürzen lassen

3) $\frac{25ab^2d}{5bd} = 5ab$;

(Außerdem kann auch Verschiedenes $\frac{c}{c}$; $\frac{d}{d} = 1$ heben sich auf, $a - a = 0$ heben sich auch, solche kann man ohne Frage wegstreichen).

Zusammengesetzte Größen durch Einfache.

$$\frac{18b^3c - 54bcd + 48b^3d^2 - 6bc^2 + 5ac + 6b}{6b^2c}$$

$$= 3b - \frac{9d}{b} + \frac{8bd^2}{c} - \frac{c}{b} + \frac{5a}{6b^2} + 1;$$

Zusammengesetzte durch Zusammengesetzte.

$\underline{a + b + c - d - e}$

$2de + ef - d^2 - b^2 - e^2 + cf + a^2 - df + 2ac + bf - 3be + af + c^2 +$

Es ist hier angemessen den Divisor an hier neben den Dividend zu schreiben. Die Operation ist ganz wie bei Zahlen. Ich dividire mit einem Theil des Divis. in einen Theil des Dividendus, multiplicire den Quot. mit dem ganzen Div., subtrahire das Product u.s.w. Auch hier ist es besser bei Multiplication des Quot. & Divis. sich nicht correspondirende Größen zu suchen sondern gerade durch zu schreiben: Wenn man nun eine solche algebraische Division vollziehen soll ein, so muß man hier auch 2 Hauptstellen [illegible] aufmerksam seyn. Wenn nämlich ein Dividend und ein Divisor gegeben ist, so muß man aufmerksam seyn ob im Dividend Producte und welche Combinationen des Divisors vorkommen; und dies zu thun, muß ich den Dividend ordnen, und muß hier auch den Princip der Combination anschließen, und muß sie in folgender Ordnung hinschreiben; hierbei muß ich aber nur auf die Buchstaben selbst und nicht auf die Coefficienten sehen. Der erste Theil des Dividend u Divisors kann nur nach für allein vorhanden seyn. Der 2te Theil aus dem ersten u ~~Theil~~ 2t. Der 3te Theil aus dem 1ten, 2ten u 3ten Theil u.s.w. Und gibt folgende Ordnung. Auf diese Art geordnet wäre also obiger Dividend folgender:

früher besser muß Buchstaben und Coefficienten zu ordnen.

1—1; $\underline{a+b+c-d+e} \,\| = a-b+c+d-e+\cancel{f}$

2—1 $\cancel{a^2}-\cancel{b^2}+\cancel{2ac}+\cancel{c^2}+\cancel{2bd}-\cancel{d^2}-\cancel{3be}+\cancel{2de}-\cancel{e^2}+\cancel{af}+\cancel{bf}+\cancel{cf}-\cancel{df}+\cancel{ef}$

2—2 $\underline{\pm\cancel{a^2}\pm\cancel{ab}\pm\cancel{ac}\mp\cancel{ad}\pm\cancel{ae}}$ $\qquad \underline{\pm\cancel{af}\pm\cancel{bf}\pm\cancel{cf}\mp\cancel{df}\pm\cancel{ef}}$

3—1

3—2 $+\cancel{b^2}-\cancel{ab}+\cancel{ac}+\cancel{c^2}+\cancel{ad}+\cancel{2bd}-\cancel{d^2}-\cancel{ae}$

3—3 $\underline{\mp\cancel{ab}\pm\cancel{b^2}\mp\cancel{bc}\pm\cancel{bd}\mp be.}$

4—1

4—2 $+\cancel{ac}+\cancel{bc}+\cancel{c^2}+\cancel{ad}+\cancel{bd}-\cancel{d^2}-\cancel{ae}-\cancel{2be}$

4—3 $\underline{\pm\cancel{ac}\pm\cancel{bc}\pm\cancel{c^2}\mp\cancel{cd}\pm\cancel{ce}}$

4—4

5—1 $+\cancel{ad}+\cancel{bd}+\cancel{cd}-\cancel{d^2}-\cancel{ae}-2be-\cancel{ce}$

5—2 $\underline{\pm\cancel{ad}\pm\cancel{bd}\pm\cancel{cd}\mp\cancel{d^2}\pm\cancel{de}}$

5—3

5—4 $-\cancel{ae}-2be-\cancel{ce}+\cancel{de}-\cancel{e^2}$

5—5. $\underline{\mp\cancel{ae}\mp be\mp\cancel{ce}\pm\cancel{de}\mp\cancel{e^2}}$

$-be$

Im umstehenden Beispiele sollte nun die Rangordnung nach $-be$ erst folgen, daß a getheilt werden, da b aber sehr leicht und die Coefficienten e f zuziehen war, da alles kein Ausgang, so geschah es mit a zuerst: der vollständige Quotient ist dieser nun $a-b+c+d-e+f+\frac{-be}{a+b+c-d+e}$;

$$=a-b+c+d-e+f-\frac{be}{a+b+c-d+e};$$

Sollte nun zu dividiren seyn:

$$\frac{2a^3c+2a^2b-4bc^2}{20a^3bc^2+2a^5bc-2a^4c^5-24b^2c^4+4abc^6+6a^4b^2-4a^6c^2-2a^3b}$$

so würde hier der 2te Hauptfall der Ordnung eintreten, und man würde hier nicht nach obigen Regeln verfahren. Hier in solchen Fällen muß man die Glieder des Dividends genau betrachten und zusehen ob nicht ein Buchstabe characteristische Unterschiede hat: Hat man nun einen solchen Buchstaben gefunden der in Divisor und Dividend gemeinschaftlich ist, so ordnet man ihn nun nach seinen steigenden oder fallenden Potenzen, und eben so ordnet man diesen Buchstaben auch im Dividendus, steigend oder

BIBLIOTH. UNIV. JAGELLON.

stellend. In diesem Falle kann man nach a und c sehen; und beliebig rangiren; und richtet sich hiernach auch nun die Rangirung des Divid.

$$2a^2b + 2a^3c - 4bc^2 \,\|\, = 3a^2b - 2a^3c + 6bc^2 - ac^4$$

$$6a^4b^2 + 2a^5bc - 4a^6c^2 + 10a^3bc^3 - \cancel{24b^2c^4} - 2a^3bc^4 - 2a^4c^5 + 4abc^6$$

$$\underline{\underset{-}{6a^4b^2} + \underset{-}{6a^5bc} - \underset{+}{12a^2b^2c^2}}$$

$$-4a^5bc - 4a^6c^2 + 12a^2b^2c^2$$

$$\underline{\mp 4a^5bc \mp 4a^6c^2 \pm 8a^3bc^2}$$

$$+12a^2b^2c^2 + 12a^3bc^3$$

$$\underline{\pm 12a^2b^2c^2 \pm 12a^3bc^3 \mp 24b^2c^4}$$

$$\underline{\pm 2a^3bc^4 \mp 2a^4c^5 \pm 4abc^6}$$

$$0$$

Hier kann man nun fragen: ist es denn nothwendig dass ich den Divisor und Dividendus ordne?

Allerdings sollte ich bemerken dass die Division aufgehen soll; denn dieselben Quotienten erhalte ich freilich nur in einer ganz andern u. weitläufigern Art ohne ~~ist die Zahl~~ seinen Werth zu ändern. z.B. die Zahl 4 kann mannigfach ausgedrückt werden.

Wichtigkeit der Ordnung bei der Division.

Zum Beweise:

$$\frac{a+b}{-b^2+a^2} = -\frac{b^2}{a} + \frac{b^3}{a^2} - \frac{b^4}{a^3} + \frac{\frac{b^5}{a^3} + a^2}{a+b} = \text{der Quotient}$$

$$\underline{\underset{+}{-b^2} \underset{+}{-} \frac{b^3}{a}}$$

$$+\frac{b^3}{a} + a^2$$

$$\underline{\underset{-}{+}\frac{b^3}{a} \underset{-}{+} \frac{b^4}{a^2}}$$

$$-\frac{b^4}{a^2} + a^2$$

$$\underline{\underset{\pm}{-}\frac{b^4}{a^2} \pm \frac{b^5}{a^3}}$$

$$+\frac{b^5}{a^3} + a^2 \text{ zum Rest.}$$

Geordnet würde der Quotient folgender seyn:

$b+a$

$-b^2+a^2) = -b+a$ = der Quotient.

$\underline{\underset{+}{-}b^2 \underset{+}{-} ab}$

$+ab+a^2$

$\underline{\underset{-}{+}ab \underset{-}{+}a^2}$

Der Beweis der Division liegt darin daß der Quot × Divisor = Dividenda. Ist der Divid: nicht = dem Producte so kann man sich, doch nicht, dagegen eingenommen.

Wenn nun beide Quotienten sich gleich sind so schließen wir umgekehrt daß die Division richtig gemacht worden ist.

Diese Probe kann man bei jedem sehr leicht machen wenn man bei jeder Art der Division den Quotient mit dem Divisor multiplicirt, wodurch man den Dividendus erhalten muß.

$(a+b)(-b+a) = \underline{a^2-b^2};$

Die zuerst herausgekommene Reihe mit $(a+b)$ multiplicirt giebt:

$$-\frac{b^2}{a}+\frac{b^3}{a^2}-\frac{b^4}{a^3}+\frac{b^5}{a^4}\frac{-\frac{b^6}{a^4}+a^2}{a+b}$$

$a+b$

$$-b^2+\frac{b^3}{a}-\frac{b^4}{a^2}+\frac{b^5}{a^3}$$

$$-\frac{b^3}{a}+\frac{b^4}{a^2}-\frac{b^5}{a^3}+\cancel{\frac{b^6}{a^4}}-\cancel{\frac{b^6}{a^4}}+a^2$$

$-b^2+a^2.$

Anmerkung z. 4.

Das Dividiren ist eigentlich weiter nichts als eine Zerlegung in Factoren, und zwar wird wenn der Dividendus und Divisor gegeben sind allemal der Dividendus als die Größe betrachtet die in Factoren zerlegt werden soll, und der Divisor als einer der gegebenen Factoren, der Quotient dagegen als der zu suchende Factor.

Nun kommt aber auch der Fall vor daß Größen in Factoren zerlegt werden sollen ohne daß ein Factor gegeben ist. Es solle z. B. die Zahl 98 zerlegt werden, so ist es 2.49 = 2.7.7.

Wenn nun mir aber eine Zahl gegeben wird von der ich nicht erkennt daß sie sich durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 u. s. w. theilen läßt, so muß ich auch sie durch alle Primzahlen wie 7. 9. 11. 13. 17. 19 u. s. w. dividiren z. B. die Zahl 323. Dies selbige zu erleichtern hat man nun die sogenannten Factoren Tafeln diese gehen bis 2,000,000, sie sind aber natürlich sehr voluminös. Wie es nun bei Zahlen vorkommt kann es auch bei Buchstaben gefordert ~~[illegible]~~ werden.

Wenn nun in einem Ausdruck ein Buchstabe überall vorkommt wie bei $a^2x - 6bx - 3acx$ so kann man ihn herausnehmen und die Größen in [illegible],

Ausschließen durch die Parenthese

Parenthese denken schreiben wir: $x(a^2-6b-3ac)$ Oft erfordert es die Rechnung, daß man die Faktoren ~~negativ~~ umgekehrt haben will; in diesem Falle muß man auch der Größe vor der Parenthese ein umgekehrtes Zeichen geben, dann aber auch alle Zeichen in der Parenthese verändern. Nur muß man sich genau merken, daß wenn man eine Größe heraussetzt, man den Ausdruck selbst durch dieselbe dividirt.

Eben so wie man in Zahlen mehrere Faktoren suchen kann, so kann man auch in mehreren Größen einen solchen Ausdruck [illegible] herzustellen: z. B. $4a^2bc-\frac{16}{7}a^3b^2c-24a^2bc^2+\frac{8}{5}a$
$=4a^2bc\left(1-\frac{4}{7}ab-6c+\frac{2}{5}a^2\right)=$
$-4a^2bc\left(\frac{4}{7}ab+6c-1-\frac{2}{5}a^2\right)$.

In der Anwendung kommen nun auch mehrere Fälle vor; und hier muß man auch immer Kunstgriffe anzuwenden suchen, da man nicht in Fällen der Anwendung die ganze Größe zugleich betrachtet, sondern immer 2 oder 3 Glieder zusammen nimmt, um sie zu betrachten: z. B.

$6a^2 + 15bc^2 - 10ac - 9abc - 25acd + 15a^2d$

$(6a^2 - 10ac) = 2a(3a - 5c)$

$(-9abc + 15bc^2) = -3bc(3a - 5c)$

$(15a^2d - 25acd) = 5ad(3a - 5c)$

Es soll also hier $2a - 3bc + 5ad$ mit $(3a - 5c)$ multiplicirt werden, zerlegt also die Forderung war.

$$\begin{array}{l} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \\ \underline{\quad -ab+b^2} \\ 2(a^2-2ab+b^2) \end{array}$$

Beyspiele.

$$3a^2 + ac - bc - 5ab + 2b^2 =$$

$$\underbrace{2a^2 - 4ab + 2b^2}_{x} + \underbrace{a^2 - ab}_{\beta} + \underbrace{ac - bc}_{\gamma} =$$

$2a^2 - 4ab + 2b^2 = 2(a-b)\cdot(a-b)$ — — x.

$a^2 - ab = a(a-b)$. — — β.

$ac - bc = c(a-b)$. — γ.

β und $\gamma = (a+c)(a-b)$ — — z.

$$x + z = (a-b)(a+c) + 2(a-b)\cdot(a-b) =$$

$$= (a+c+2a-2b)\cdot(a-b) =$$

$$= \underline{(3a-2b+c)\cdot(a-b)}$$ als kürzester Ausdruck.

Von den Functionen.

Seite 50. Der Verfasser bringt hier zuerst einiges über die Lehre von den veränderlichen Größen, die man in der Regel doch erst später zu nehmen pflegt. Allein dies ist zu einer genaueren näheren Art der Demonstration des binomischen Lehrsatzes, gewissermaßen nothwendig.

In der Algebra giebt es nun nur bekannte, bekannte und unbekannte Größen, und diese so genannte unbekannte Größen haben in einer Gleichung einen bestimmten Werth. In den Diophantischen Gleichungen haben sie 2 Werthe, doch die und die Werthe in solchen Gleichungen, in der Folge.

Hier muss man aber den Begriff fester stellen, und man muss glauben, dass sie auch mehrere Werthe annehmen können. Der Begriff und die Lehre von den veränderlichen betrachtet nun solche veränderliche Größen, und hier muss man nicht bloß unbekannte sondern auch zugleich den Begriff veränderlicher Größen [illegible]. Man könnte nun zu gut bekannte Größen ändern verstehen, allein alsdann muß einem diese ändern können wie man will.

Veränderliche Größen

Solche veränderliche Größen nun, heißen Funktionen Größen, und man wählt zu ihrer Bezeichnung in der Regel die letzten Buchstaben des Alphabets als x.y.z. Der Ausdruck also $3ax - 2dx^3 - 5cx^5$, kann als eine Function von x genannt werden, wenn nämlich x hierin eine veränderliche Größe ist. Eben so ist $4cy^2 - cahy^3 + 53ey^4$ eine Funktion von y; Allein das womit eine Unbekannte solcher Größen multiplicirt wird heißt ihr Koeffizient. z.B. von $\frac{4a^2bx}{c}$ ist $\frac{4a^2b}{c}$ der Koeffizient von x.

Man pflegt die Funktionen gern nach den Potenzen der veränderlichen Größe in Hinsicht der Folge ihrer Glieder zu schreiben, und zwar steigend oder fallend, das letztere aber am besten. Eine so geschriebene Funktion heißt dann geordnet, und sie enthält so viel Glieder als die Ordnung der Function Potenzen der Funktionsgröße vorkommen. Fehlt nun in einer solchen Funktion eine Potenz so muß man ein * machen für alle Potenz zu vereinigen, wie im unten stehenden Beyspiel bei x^3. Oft vereinigen sich diese Functionen nicht, entgegengesetzt sind, sondern ohne sich aufheben, und deshalb muss man genau den Coefficient von der Potenz beim ordnen. z.B.

$$ax + bx + cx^2 - \cancel{d^2x^3} + ex^4 - 5fx + \cancel{d^2x^3} + hx^5$$

würde geordnet folgende Form haben:

$$(a + b - 5f)x + x^2(c) * + ex^4 + hx^5.$$

Man pflegt aber nicht so wie hier die Coefficienten vor zu schreiben sondern man schreibt sie gewöhnlich so:

$$\left.\begin{matrix}a\\b\\-5f\end{matrix}\right\}x \quad \left.+c\right\}x^2 \quad * \quad +e\,\Big|\,x^4 \quad +h\,\Big|\,x^5.$$

Form einer Function.

Form überhaupt ist die Verbindung der Größen wie sie sich in einem Ausdrucke zeigt. Zwei Functionen dagegen haben einerlei Form, wenn in gleichen Gliedern von Anfang an, einerlei Dignitäten der veränderlichen Größe vorhanden sind, wo nicht so haben sie verschiedene Formen. Auf ihre Coefficienten [illegible] wird übrigens hierbei gar nicht gesehen. z.B.

und die Funktionen:

$$2 - 3x^{\frac{1}{2}} + x - 8x^{\frac{3}{2}} + 2x^{2} - x^{\frac{5}{2}} + x^{3} + \dots$$

$$1 + 4x^{\frac{1}{2}} + 2x + 7x^{\frac{3}{2}} + x^{2} + 8x^{\frac{5}{2}} \dots$$

von einerlei Form, weil sie von Anfang an in einerlei Potenzen von x fortschreiten, obgleich sie nicht einerlei Koeffizienten, Zeichen, und auch nicht gleiche Anzahl Glieder haben. Denn alles und letztere ist [illegible] gleichgültig.

Für das Wort Funktion braucht man gewöhnlich eigene Zeichen, den F. f. Φ. Ψ; und diese stellen also den Gedanken und den Begriff von einer Funktion in sich vereinigen, also z. B. Fx; fx. φx. ψx heißt allemal Funktion von x. Zwei Funktionen von einerlei veränderlichen Größe, würde man so bezeichnen:

$$Fx = 2 - x + x^{2} - 7x^{3} + x^{4} - x^{5}.$$

$$fx = 3 - 2x + 3x^{2} \quad * \quad + 7x^{4}.$$

§24.

Das Produkt aus 2 Funktionen von einerlei Form wie F und Ψ, ist allemal eine Funktion von der nämlichen Form.

Der Verfasser hat hier es seinem Beweise zu

1.) Das Produkt 2er und mehrerer Funktionen von einerlei Form ist eine Funct. derselben Form ersten Gliedes unsrer Funktionen 1 gewählt, weil dies gerade die bequemste Zahl ist, da sie sich am wenigsten verändert z. B. durch Potenzirung, übrigens ist es ganz gleichgültig welche Zahl als Zeiger des erste Gliedes auftrete. z. B.:

Beweis. $\cancel{X} =$

$$a = 2 - 3x + x^2 - 8x^3 + 4x^4 - 3x^5 + 4x^6$$
$$b = 1 - 4x - 2x^2 + 8x^3 + 2x^4 - x^5$$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c}
2 \; -3 & x \; +1 & x^2 \; -8 & x^3 \; +4 & x^4 \; -3 & x^5 \; +4 & x^6 & & \\
-8 & x \; +12 & -4 & +32 & -16 & +12 & -16 & x^7 & \\
 & -4 & +6 & -2 & +16 & -8 & +6 & -8 & x \\
 & & +16 & -24 & +8 & -64 & +32 & -24 & \\
 & & & +4 & \cancel{+}6 & +2 & -16 & +8 & \\
 & & & & -2 & +3 & -1 & +8 &
\end{array}$$

$$= 2 - 11x + 9x^2 + 10x^3 + 14x^4 - 3x^5 - 51x^6 + 5x^7 - 16x^8 \ldots\ldots$$

Die hier zuletzt als Product herausgekommene Funktion ist nun nach Seite 42, wie ebenfalls Form wie die Funktionen d. Faktoren.

Da nun die Funktionen nicht immer geschlossen sind, sondern ohne Ende fortlaufen, wenn man denn aber eine Operation z. B. hier die Multiplikation mit ihnen vornimmt, so geht man nur einmal so weit in d. Multiplication treibt, bis daß man zum Produkt die höchste Potenz von x. die in den gegebenen Funktionen ist, erreicht hat, d. h. höhern Glieder läßt man ab- [illegible] hinweg. Schließt z. B. die eine Funktion mit x^6 so schließt auch das Produkt mit x^6. Aus diesem Grunde sind auch hier die stehenden höheren Potenzen als $x^{9.8}+$ nicht mit aufgenommen.

Anmerkung. Wenn man mehrere Funktionen zu vergleichen hat und man braucht dabei einerlei Buchstaben so macht man in d. Regel kleine Striche:

$$Fx = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \dots$$
$$fx = a'x + b'x^2 + c'x^3 + d'x^4 + \dots$$
$$\varphi x = a''x + b''x^2 + c''x^3 + d''x^4 + \dots$$
$$\psi x = a'''x + b'''x^2 + c'''x^3 + d'''x^4 + \dots$$

Zusatz.

Man mag nun also Funktionen von einerlei Form multipliciren so viel man wolle so ist das Produkt immer eine Funktion von derselben Form.

Und deßhalb ist auch die m^te Potenz einer Funktion wieder eine Funktion von derselben Form.

also $(z + ax + bx^2 + cx^3 + \dots\dots px^n)^m =$

$= (u + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \dots Px^{mn};$

$$\begin{array}{l}
1+z\,)\,1\,(= 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots \\
\underline{\pm 1 \pm z} \\
\quad -z \\
\quad \underline{\mp z \mp z^2} \\
\qquad +z^2 \\
\qquad \underline{\pm z^2 \pm z^3} \\
\qquad\quad -z^3 \\
\qquad\quad \underline{\mp z^3 \mp z^4} \\
\qquad\qquad +z^4 \\
\qquad\qquad \underline{\pm z^4 \pm z^5} \\
\qquad\qquad\quad -z^5
\end{array}$$

§25.

Den Quotient angeben welcher 1 dividirt durch $1+z$ geben muß.

Es ist aus nebenstehender Operation klar daß die Division den Quotient nach dem eingegangenen Gesetz fortsetzen würde, und deßhalb können wir ihn gleich ohne wirklich zu dividiren in dieser Art fortführen, daß alle ungeraden Potenzen von z negativ u. alle geraden positiv werden, indem jedes folgende Glied aber um eine Potenz von z steigt.

Es frägt sich aber hierbei nur ob wir berechtigt sind aus den ersten Gliedern einer erhaltenen Größe, das Gesetz der ganzen Fortsetzung auch für die Folge als allgemein gültig anzunehmen, und dies ist nicht bewiesen worden.

In der Analysis können wir nun nie wie in der andern ~~Math.~~ die Beweise so klar führen und man gebraucht in der Analy: eigentlich nur zweierlei Arten von Beweisen. nämlich: Beweise durch vollständige Induction, u. die durch unvollständige Induction, die sich denn folgendermaßen unterscheiden.

Suche ich nämlich hier im gegenwärtigen Falle das Gesetz des Fortgangs für alle Glieder aus den ersten Gliedern, weil ich hier sehe, daß die fortzusetzende Operation immer gleichförmig bleibt, so ist dieser Beweis durch unvollständige Induction geführt.

Bei der vollständigen Induction verfährt man so. Man nimmt an das abgeleitete Gesetz sey für irgend ein gewisses Glied und desgleichen mit dem in Verbindung steht wahr, und untersucht dann ob, genau welche Bedingung wie es dem darauf folgenden gelten haben müßten. Findet es sich nun, daß das nächstfolgende Glied demselben Gesetze unterworfen ist, (wie sich zeigt), so muß das, aus nach den ersten Gliedern abgeleitete Gesetz allgemeine Gültigkeit haben.

Untersuchen wir nun in dieser Hinsicht die Glieder des Quotienten und ihre zugehörigen Reste so finden wir die Reste entgegengesetzte Zeichen und eine Potenz höher als das zugehörige Glied, und also folgendes.

$$\frac{1}{1+z} = \text{Theile d. Quot.}\quad 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \ldots\ldots \pm z^n \mp z^{n+1} \pm z^{n+2} \ldots\ldots$$

$$\text{Theile der Reste}\quad -z + z^2 - z^3 + z^4 - z^5 + \ldots\ldots \mp z^{n+1} \pm z^{n+2} \mp z^{n+3}.$$

48.

Fällen wo nicht unvollständige Reduction, und schnell zu gegebenem Ausdruck.

Wird nun die Division so gestaltet, so ist es eine vollständige Reduction, wenigstens pflegt man sie so zu nennen, jedoch erlaubt man sich in solchen Fällen ~~Will man nun~~ untersuchen wie die Function ist wenn man $\frac{1}{1-z}$ dividirt, so kann man leicht sehen daß die Combinationen und Potenzen von z dieselben seyn werden, und daß nur die Zeichen anders werden. In solchen Fällen thut man gut wenn man die Resultate des Gesetzes gut gleich hinschreibt und dann die Zeichen nach dem neuen Gesetz verändert.
Substituirt man nun statt $-z$ jetzt den Werth $+z$ so erhält man

$$1-(-z)+(-z)^2-(-z^3)+(-z)^4-(-z^5)+\ldots =$$
$$= 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+\ldots = \frac{1}{1-z};$$

γ) Der Quotient zweier Functionen einerlei Form ist eine Function derselben Form.

Wenn man 2 Functionen von einerlei Form durch einander dividirt so muß der Quotient auch eine Function von derselben Form geben.

Denn, so wie überall ist es gut wenn man schon im Voraus schließt, dann wird hier eine Form ein Resultat wahrscheinlich als nothwendig geben

[illegible] wird aber auch, ehe man eine Operation wirklich anfängt.
Hier wird es nun schon im Voraus klar gezeigt daß d. Quot. eine Funktion von derselben Form als d. Divisor u. also auch als d. Divid. seyn muß, da das Produkt d. Divis. u. Quot. giebt den Divid. Funktionen von gleichen Formen geben aber nur wieder gleiche Formen, u. daher d. Quot. von eben d. Form.

Lagrange ib

Ein deutlicherer Beweis ist folgendes:

$$\frac{X}{Z} = \frac{1+ax+bx^2+cx^3}{1+Ax+Bx^2+Cx^3}$$ zu suchen sey d. Quot.

$$\frac{X}{Z} = X\cdot\frac{1}{Z}\,;$$ setzt man nun ferner

$$Z = 1+z\,.$$ so ist $$\frac{X}{Z} = X\cdot\frac{1}{1+z}$$ also

$$\left(1+ax+bx^2+cx^3+\right)\cdot\left(1-z+z^2-z^3+z^4-\dots\right)$$ Seite 48.

Es bleibt also hier nur noch auszumitteln ob der zweite Factor $1-z+z^2$ u. s. w. auch eine Funktion von einerley Form mit f X. sey. Da nun $z = Ax+Bx^2+Cx^3$ ist so substituire man in dem 2t Factor statt $z;\ z^2,\ z^3\dots$ ihre Werthe so folgt.

$$\left(1-z+z^2-z^3+z^4-\dots\right) = \begin{array}{l|l|l|l|l|l}
1-A & x-B & x^2-C & x^3-D & x^4-E & x^5-\dots\\
 & x+A^2 & +2AB & +B^2 & +2AD & \\
 & & -A^3 & +2AC & +2BC & \\
 & & & -3A^2B & -3AB^2 & x^5\dots\\
 & & & & -3A^2C &
\end{array}$$

50.

Setzt man nun für die entstehenden erhaltenen Koeffizienten a', b', c' u. s. w. so ist die Reihe

$$1-z+z^2-z^3+\cdots \;=\; 1+a'x+b'x^2+c'x^3+\cdots$$

von ~~auf~~ einerlei Form der Funktion X', und die Quotient als Produkt zweier auch von einerlei Form also hier:

$$\frac{X}{Z}=(1+ax+bx^2+)\cdot(1+a'x+b'x^2+c'x^3+\cdots)=\underline{1+\alpha x+\beta x^2+}$$

Nachträglich wird es durch ein Zahlen Beispiel machen. Es sey also X durch Z zu dividieren ..

$$\begin{array}{l}
Z = 2+x-3x^2+x^3 \\
\hline
X = 12-2x+2x^2-8x^3+6x^4 \;\Big)\; = 6-4x+12x^2-19x^3+\cdots\cdots \\
\quad \underline{\cancel{12}+6x\mp18x^2\pm6x^3} \\
\qquad -8x+20x^2-14x^3+6x^4 \\
\qquad \underline{-8x-4x^2+12x^3-4x^4} \\
\qquad {+}\quad\;\; {+}\qquad\;\; {-}\qquad\; {+} \\
\qquad 0\;\; +24x^2-26x^3+10x^4 \\
\qquad\quad \underline{+24x^2\pm12x^3\mp36x^4} \\
\qquad\qquad -38x^3+46x^4 \\
\qquad\qquad \underline{\mp38x^3\mp19x^4} \\
\qquad\qquad\qquad +65x^4
\end{array}$$

aus welcher also klar hervorgeht daß der Quotient eine Funktion von derselben Form ist.

Weil übrigens die oben [illegible] Division betrifft, so wird das später [illegible] Anwendung d. F. in den ∞ Reihen vorkommen.

Zusatz 3 z. P. Auch die Potenz von $\dfrac{1}{1+ax+bx^2+}$ ist eine Funktion von d. Form des Binoms nach oben gesehen. Denn es ist - - -

$$\frac{1}{+ax+bx^2+cx^3}\Big)^m = \frac{1^m}{(1+a'x+b'x^2+c'x^3)^m} = 1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4$$ nach Art. 49.

Beispiel.

$$2+x-3x^2+x^3 \,)\, 1 \,(= \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}x + \tfrac{7}{8}x^2 - \tfrac{17}{16}x^3 + \ldots\ldots$$

$$+1$$

$$\pm 1 \pm \tfrac{1}{2}x \mp \tfrac{3}{2}x^2 \pm \tfrac{1}{2}x^3$$

$$-\tfrac{1}{2}x + \tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}x^3$$

$$\mp\tfrac{1}{2}x \mp \tfrac{1}{4}x^2 \pm \tfrac{3}{4}x^3$$

$$+\tfrac{7}{4}x^2 - \tfrac{5}{4}x^3$$

$$\pm\tfrac{7}{4}x^2 \pm \tfrac{7}{8}x^3$$

$$-\tfrac{17}{8}x^3$$

3) Die m^{te} Potenz einer Ch. ist eine Funct. derselben Form

$m = \overset{\text{ganze}}{\pm}$ oder gebr.: Zahl.

126. Lehrsatz.

Auch dann ist es erlaubt für $(1+ax+bx^2+cx^3)^m$, $1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots$ zu setzen wenn auch m positiv oder negativ, positiv od. negativ gebrochen ist.

I für $+m$ ist es schon bewiesen Art. 45.

II für $-n = m$

$$y^m = (1+ax+bx^2+cx^3+dx^4)^{-n} = \frac{1}{(1+ax+bx^2+cx^3)^n} = \left(\frac{1}{1+ax+bx^2+cx^3}\right)^n$$

und nach Art. 51. $= 1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\ldots\ldots$

III für $\frac{u}{v} = m$ so ist: $y^m = (1+ax+bx^2+cx^3)^{\frac{u}{v}} = \sqrt[v]{(1+ax+bx^2+cx^3)^u} =$

$= \sqrt[v]{1+a'x+b'x^2+c'x^3}$;

Wenn man sich nun den Begriff d. √ausziehens unmöglich, so wäre es nichts anderes als eine Zerfällung in gleiche Faktoren, anzuzeigen. Größe die unter dem V Zeichen steht. Diese v gleichen Faktoren nun müssten vollständig von derselben Form gesetzt, konnte ja nicht die Funktion 1+ax+bx. entstanden seyn.

IV $\underline{n = -\frac{u}{v}}$.

$$z^{n} = (1+ax+bx+cx^2+..)^{-\frac{u}{v}} = \frac{1}{(1+ax+bx^2..)^{\frac{u}{v}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt[v]{(1+ax+bx^2+..)^{u}}} = \frac{1}{\sqrt[v]{1+a'x+b'x^2+c'x^3}} =$$

$$= \frac{1}{1+Ax+Bx^2+Cx^3} =$$

$$= \underline{1 \pm \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \ldots}$$

Uebrigens ist es auch hier nicht nöthig, diesem Lehrsatze alle Gewissheit u. Strenge zu geben, indem hier nur bloße Mittheilung schon hinreicht, und nachmals das Theorem auf eine leichtere Art bewiesen werden wird.

III Abschnitt d. A.

Einleitung.

Der Verf. braucht im § 7 eigentlich für den Ausdruck mathematische Aufgabe dasjenige, da er hier hätte algebraische Aufgabe sagen sollen.

Eine Mathematische Aufgabe ist eigentlich die sich auf irgend welchen ~~Math.~~ Theil als Geometrie, Trigonometrie und angewandte Math. bezieht.

Eine Aufgabe aber die nur durch Algebra aufgelöst werden kann heißt im engern Sinne algebraisch.

Nach dem Sprachgebrauch ist eine algebraische Aufgabe eine mathem. da der Algebra ein Theil der Math. ist. — —

In diesen Arten von Aufgaben müssen Größen gesucht werden die zu sich und zu ~~den~~ andern Größen in gewissen Beziehungen stehen.

Aufgelöst ist eine Aufgabe, wenn eine od. mehrere verlangte Größen durch die Wirkung durch ~~unbekannte~~ gegebene Größen bestimmt sind.

Algebra heißt nun der Theil der Analysis der sich mit Auflösung d. Gleichungen beschäftigt, vermittelst deren algebraische Aufgaben gelöst werden; denn es ist ein großer Unterschied zwischen Buchstabenrechenkunst, Algebra, und Analysis.

Buchstabenrechnung ist für Algebra und Analysis, was die 4 Species für Zahlenrechnung sind, denn sie lehrt nur die Elementar-Operationen an mit Buchstaben vorzunehmen.

Sobald die Algebraischen Gleichungen es mit veränderlichen Größen zu thun haben, so gehört es in das Gebiet der Analysis.

Oft häufig werden diese Ausdrücke mit einander verwechselt, und ist es aber der genauen Begriffe wegen zu kennen.

§28.

Bekannte Größen nennt man a b c d, ...
unbekannte derg. x. y. z.

§29.

Gleichung heißt ein doppelter Ausdruck einerlei Größe auf jeder Seite des Gleichheitszeichens, steht ein Theil der Gleichung: durch + u. − verbundene Größen heißen Glieder d. Gleichung.

Algebraisch wird die Gleichung wenn sich in ihr nur [illegible] unbekannte Glieder befinden die auch bekannt werden sollen. z.B. $12x = 7+9+15-3$;

§ 30. …

Alle Verwandlungen die bei der Auflösung von Gleichungen mit den Größen vorgenommen werden beruhen auf folgenden Grundsätzen:

Gleiches zu Gleichem addirt giebt Gleiches
——— von ——— subtrahirt ——— Gleiches.
——— mit ——— X. ——— Gleiches
——— dch ——— divid. ——— Gleiches.

Nun muß man beim Auflösen d. Gleichungen immer das Princip vor Augen haben, was ich auf einer Seite des Gleichheitzeichens verändere muß ich auch der andern auch thun.

Beispiel. Begriff d. Gleichung wenn in ihr nur unbekannte Größen mit der 1ten Potenz verbunden, zu suchen sind od. mehrere unbekannte Größen in ihr verbunden heißt sie eine Gleichung mit 1, 2, 3, 4, 5 ꝛc. Größen genannt.

Die möglichen Verbindungen in denen nun die unbekannte Größe erscheinen kann sind:

$x+a = b$ — I
$x-c = d$ — II
$ex = f$ — III
$\frac{x}{g} = h$ — IV

und um x allein zu erhalten muß ich mit der

Gleichung immer nach der entgegengesetzten Seite.
In I Gl. ist a zu x addirt daher muß ich in dieser
Gleichung a subtrahiren, in II ist c subtrahirt
in III ist x mit e multiplicirt in IV ist x dividirt
daher muß ich in II c addiren in III mit e divid.
in IV d. g. x mult. wie folgt:

$$\begin{array}{l} x+a = b. \\ \underline{-a = -a} \\ x = b-a; \end{array} \qquad \begin{array}{l} x-c = d; \\ \underline{+c = +c} \\ x = d+c; \end{array} \qquad \begin{array}{l} ex = f. \\ \frac{ex}{e} = \frac{f}{e} \\ x = \frac{f}{e}. \end{array} \qquad \begin{array}{l} \frac{x}{g} = h. \quad \cdot g \\ \hline x = gh. \end{array}$$

Man pflegt x immer + zu setzen u. deshalb kann man auch wenn x, −, erscheint die Zeichen aller umkehren ohne den Werth zu ändern. z. B.
$-b-x = c$, so würde x und b nach der andern Seite versetzt $= c+b+x = 0$.
Das nennt man eine Gleichung auf 0 reduciren
soll ich nun aus dieser Gleichung x allein haben, so subtrahire ich auf beiden Seiten c+b, u. das giebt $x = -c-b$.
Das erhalte ich nun auch umgekehrt wenn ich die Zeichen umkehrte.

Wenn nun in einer Gleichung
Divisoren vorkommen so muß man diese weg

[illegible]

2) und Bruchstrichen wenn die unbekannte Größe verbunden ist wegschaffen

3) dann bringt man die Glieder worin sich die unbekannte Größe befindet auf die eine Seite die übrigen auf die andere Seite des Gleichheitszeichens

4) die Theile d. Gleichung wo x ist zerlegt man in Faktoren so daß x ein Faktor ist.

5) dividirt man mit dem andern Faktor die Gleichung. z.B. (Cf. p. 73)

$$\frac{a-x}{b} - \frac{x-c}{a} = d; = a-x - \frac{bx-bc}{a} = bd; =$$

$$a^2 - ax - bx + bc = abd; = -a^2 + ax + bx - bc = -abd$$

$$ax + bx = a^2 + bc - abd \;; \quad x(a+b) = a^2 + bc - abd; =$$

$$x = \frac{a^2 + bc - abd}{a+b};$$

Die erste Gleichung die gegebene heißt die Hauptgleichung, die in der Mitte die Mittelgleichungen die letzte die Schlußgleichung.

Die Schlußgleichung verlangt man nun immer in dem einfachsten Ausdruck; dazu zu gelangen, aber lassen sich keine Regeln geben sondern dies muß durch Übung gelernt werden. Hier würde es sein

$$x = \frac{a(a-bd)+bc}{a+b} \quad \text{oder} \quad x = \frac{a^2+b(c-ad)}{a+b};$$

Um sich nun von der Richtigkeit d. Operation zu überzeugen hat man 1) eine specielle Probe.

2) eine allgemeine Probe.

Die 1te besteht darin daß man statt der Buchstaben welche bekannte Größen anzeigen, Zahlen angiebt nach welchen d. gefundene Ausgleichung einen Werth für x bekommt, diesen Werth sowohl als auch jene für a b c d .... substituirt man nun in der Hauptgleichung, und untersucht dann ob die Gleichung noch statt findet. z. B. in

$x = \frac{a^2+b(c-ad)}{a+b}$ sey $a=4$; $b=6$; $c=3$.

$d=-8$; so ist $\frac{16+6(3-32)}{2} = x$

$x = -\frac{158}{2} = -79$.

diese Werthe in d. Hauptgleichung gesetzt, ein

$\frac{a-x}{b} - \frac{x-c}{a} = d$ so ist $\frac{-4+79}{6} - \frac{-79-3}{-4}$

$= -8$; $= \frac{75}{6} - \frac{-82}{-4} = -8$;

$12\frac{1}{2} - 20\frac{1}{2} = -8$; d. h. $-8 = -8$.

Bei einer allgemeinen Probe muß man in die gegebene Gleichung den Werth von x

setzen, und [illegible] [illegible] ab beide Theile = setzt.
Wenn man die Probe will, so erhält man in der
Gleichung statt x immer den unbekannten Werth.
also in der Gleichung

$$\frac{a-x}{b} - \frac{x-c}{a} = d \quad ; \text{ wo } \quad x = \frac{a^2+bc-abd}{a+b} \text{ gesetzt wird}$$

$$\frac{a - \frac{a^2+bc-abd}{a+b}}{b} - \frac{\frac{a^2+bc-abd}{a+b} - c}{a} = d.$$

weil a und b durch Theile multiplicirt werden, um sie auf gleiche Benennung zu bringen.

$$\frac{\frac{a^2+ab-a^2-bc+abd}{a+b}}{b} - \frac{\frac{a^2+bc-abd-ac-bc}{a+b}}{a} = d =$$

$$= \frac{a^2+ab-a^2-bc+abd}{b(a+b)} - \frac{a^2+\cancel{bc}-abd-ac-\cancel{bc}}{a(a+b)} = d =$$

$$= \frac{\cancel{a^2b}-\cancel{abc}+a^2bd-\cancel{a^2b}+ab^2d+abc}{ab(a+b)} = d.$$

$$= \frac{a^2bd+ab^2d}{ab(a+b)} = \frac{abd(a+b)}{ab(a+b)} = d = d.$$

welches nun beweist daß die Auflösung von x
richtig sey.

Damit man nun aber eine bessere Uebung
hiefür erhält, wenn solche Ausdrücke in Brüchen

vv.

wegzuschaffen sind; zeigt es sich nun wie man am besten zu multipliciren haben wird. Das muss nun freilich durch Uebung erlernt werden, und am meisten kommt es darauf an, die Größen möglichst zusammenzuhalten, besonders wenn man [illegible] hat die nur bekannte Größen haben. Gesetzt man hätte folgende Gleichung so würde man folgendergestalt verfahren.

$$\frac{b-c+ax}{a+c} - \frac{(cx-a-c)(a+d)}{b-c} = b+c.$$

$$\frac{b-c+ax}{a+c} - \frac{cx(a+d)-(a+c)(a+d)}{b-c} = b+c.$$

$$(b-c)^2 + ax(b-c) - cx(a+d)(a+c) + (a+c)^2(a+d) = (b+c)(a+c).(b-c)$$

$$ax(b-c) - cx(a+d)(a+c) = (b+c)(a+c)(b-c) \pm (a+c)^2(a+d) - (b-c)^2$$

$$x = \frac{(b+c)(a+c)(b-c) \pm (a+c)^2(a+d) - (b-c)^2}{a(b-c) - c(a+d)(a+c)}$$

$$x = \frac{(b-c)\left[(b+c)(a+c) - (b-c)\right] - (a+c)^2(a+d)}{a(b-c) - c(a+d)(a+c)}$$

Wird nun ein Zahlenbeispiel gegeben wie folgendes, so wird man wohl thun die [illegible]

Durch Dividiren von x nach Theilungs stellen zu suchen, damit der General Nenner = zu gewinnen und die Brüche zu wirklichen werden. z.B.

$$x - \tfrac{1}{5}x - \tfrac{1}{12}x - \tfrac{1}{20}x - \tfrac{1}{7}x - \tfrac{1}{8}x - \tfrac{1}{4}x = 500.$$

$$20x - 4x - \tfrac{5}{3}x - x - \tfrac{20}{7}x - \tfrac{5}{2}x - 5x = 10000 = .$$

$$= 10x - \tfrac{20}{7}x - \tfrac{5}{3}x - \tfrac{5}{2}x = 10000.$$

$$= 60x - \tfrac{120}{7}x - 10x - 15x = 60000.$$

$$= 35x - \tfrac{120}{7}x = 60000$$

$$= 7x - \tfrac{24}{7}x = \cancel{[illegible]}\ 12000.$$

$$= 49x - 24x = 25x = 84000 = \underline{3360}.$$

Ein anderes Beyspiel sey:

$$\frac{-b\left(1-\frac{bx}{a}\right)}{d} + \frac{x}{a} = \frac{x}{\frac{af}{c}} - \frac{-\left(1-\frac{c}{f}\right)}{b-c} - \frac{-\frac{bcx}{a}}{d};$$

$$= \frac{-ab+b^2x}{ad} + \frac{x}{a} = \frac{cx}{af} - \frac{-f+c}{f.(b-c)} - \frac{-bcx}{ad};$$

$$= -ab+b^2x + dx = \frac{cdx}{f} - \frac{-adf+acd}{f(b-c)} + bcx;$$

$$= -abf + b^2fx + dfx = cdx - \frac{-adf+acd.}{(b-c)} + bcfx; =_{\text{verf.}}$$

$$= dfx + b^2fx - cdx + bcfx = abf + \frac{adf - acd}{(b-c)};$$

$$= x = \frac{abf + \frac{adf-acd}{(b-c)}}{df + b^2f - cd - bcf} = \frac{abf(b-c) + adf - acd}{(b-c)(df + b^2f - cd - bcf)};$$

$$x = \frac{ab^2f - abcf + adf - acd}{(b-c)(df + b^2f - cd - bcf)} = \frac{a(b^2f - bcf + df - cd)}{(b-c)(b^2f - bcf + df - cd)};$$

also $X = \underline{\frac{a}{(b-c)}}$;

§ 33.

Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen.

Die Auflösung solcher Aufgaben kann auf einem 3fachen Wege versucht werden.

1) durch Eliminiren.

Man sucht hierbei aus jeder der gegebenen Gleichungen zuvörderst den Werth einer einzigen unbekannten Größe zu suchen, und betrachtet hierbei die übrigen unbekannten Größen als bekannte. Aus den gefundenen Werthen werden nun wieder neue Gleichungen zusammengesetzt, als noch unbekannte Größen übrig sind, in welcher Ordnung dies geschieht ist ~~überflüssig~~ gleichgültig und diesen durch die Zusammensetzung erhaltenen Gleichungen verfährt man alsdann auf eine wie mit den gegebenen. Diese Arbeit setzt man alsdann so lange fort bis man auf eine Gleichung kommt worin nur noch eine unbekannte Größe zu suchen ist. Ist deren Werth gefunden so setzt man denselben in die Werthe der nächst vorangegangenen unbekannten Größe setzt in gleicher Art rückwärts weiter fort, bis endlich jede unbekannte Größe durch die bekannte bestimmt ist.

2/ durch Substitution.

Das Verfahren hierbei ist: Man sucht aus einer Gleichung den Werth einer der unbekannten Größen, indem man ebenfalls die übrigen Größen als bekannt voraussetzt. Diesen Werth setzt man unmittelbar in jede der andern Gleichungen u. verkürzt dieselben möglichst. Aus einer derselben sucht man wieder eine andre unbekannte Größe, und setzt diesen gefundenen Werth wieder in die andern Gleichungen die noch übrig sind, und so ergiebt man wieder [illegible] aus einer zuletzt noch eine Gleichung kommt, wodurch nur noch eine unbekannte Größe zu bestimmen ist. Bei der [illegible] geht man rückwärts [illegible] eliminiren, und erhält die [illegible] unbekannte Größen.

3) durch Addition u. Subtraction.

Diese beruht nun auf dem wesentlichen Princip, daß man 2 und 2 Gleichungen so verändert, d. h. so umformt, daß in ihnen eine Größe durch Addition oder Subtraction gänzlich wegfällt, um diesen Zweck zu erreichen muß man entweder wechselseitig mit den Coefficienten der Größen welche wegfallen sollen, die Gleichungen multipliciren. Aber so verfährt man hier so lange bis man nicht eine Gleichung bekommt, wo man nur noch eine unbekannte Größe findet, und dann geht man gleichfalls rückwärts bis man alle Größen durch bekannte bestimmt hat.

Wenn nun aber überhaupt solche Aufgaben mit mehreren unbekannten Größen aufgelöst werden sollen, so ist es nothwendig

[illegible]

Beispiel. durch Elimination.

1) $3x - 2y + z = a$; 2) $2x - y + 5z = b$; 3) $x + 3y - 2z = c$;

4) $x = \frac{a + 2y - z}{3}$; 5) $x = \frac{b + y - 5z}{2}$ 6) $x = c - 3y + 2z$.

aus 4 = 5.

$$\frac{a+2y-z}{3} = \frac{b+y-5z}{2}$$

$$2a + 4y - 2z = 3b + 3y - 15z.$$

6) $y = 3b - 2a - 13z$;

aus 4 = 6.

$$\frac{a+2y-z}{3} = c - 3y + 2z.$$

$$a + 2y - z = 3c - 9y + 6z.$$

7) $y = \frac{3c - a + 7z}{11}$.

aus 6 = 7.

$$3b - 2a - 13z = \frac{3c - a + 7z}{11}.$$

$$33b - 22a - 143z = 3c - a + 7z.$$

$$z = \frac{33b - 21a - 3c}{150};$$

$$z = \frac{11b - 7a - c}{50}.$$

Setzt man den Werth für z in die Gleichung 6 substituirt gesetzt.

$$y = 3b - 2a - \left(\frac{11b - 7a - c}{50}\right) \times 13; = \frac{150b - 100a - 143b + 91a + 13c}{50}.$$

und endlich $y = \frac{7b - 9a + 13c}{50}$. Setzt den Werth für y und z in die Gleichung 4 [illegible] $x = \frac{a + \frac{14b - 18a + 26c}{50} - \frac{11b - 7a - c}{50}}{3}$ und

$$x = \frac{50a + 14b - 18a + 26c - 11b + 7a + c}{3 \cdot 50}.$$

$$x = \frac{39a + 3b + 27c}{3 \cdot 50}; \quad x = \frac{13a + b + 9c}{50}.$$

Die Werthe waren also $x = \frac{13a+b+9c}{50}$; $y = \frac{7b - 9a + 13c}{50}$; $z = \frac{11b - 7a - c}{50}$.

Ist jeder Werth allgemein bestimmt, so erhält man in jeder derselben Aufgaben. Wenn aber für die Buchstaben a, b, c u. s. w. in einer wirklichen bestimmten Zahlen gegeben sind, so könnte man bloß die letzten unbekannte Größe in Zahlen ausrechnen u. ihren Zahlen Werth in den übrigen Gleichungen setzen u. s. w.

So wie bei den Gleichungen mit einer unbekannten Größe, so giebt es auch hier eine doppelte Art die Probe zu machen ob man richtig gerechnet habe.

nämlich einmal durch Zahlen, u. dann durch die im Werthe erhaltenen allgemeinen Größen selbst.

Bei der Probe mit allgemeinen Größen muß ich aber nur die Gleichung zur Probe Gleichung benutzen aus welcher ich den letzten Werth von der unbekannten letzten Größe entwickelt habe, indem es sonst leicht Verwechslung nicht bemerken könnte, indem ich sie entwickelt habe; also hier nicht aus der Gleichung 1 oder 4. sondern aus einer andern, so ist man dann überzeugt daß ich richtig gerechnet habe.

Wenn wir hier also die 2te Gleichung nehmen so ist

$2x - y + 5z = b$. und für x, y, z ihre Werthe;

$$\frac{26a + 2b + 18c}{50} - \frac{7b - 9a + 13c}{50} + \frac{55b - 35a - 5c}{50} = b$$

und
$$\frac{26a + 2b + 18c - 7b + 9a - 13c + 55b - 35a - 5c}{50} = b.$$

abgekürzt $\frac{50b}{50} = b = b$. also die Rechnung richtig.

2te Weg durch Substitution Beispiel.

1) $3x - 2y + z = a$ 2) $2x - y + 5z = b$; 3) $x + 3y - 2z = c$;

aus 1) ④ $z = a - 3x + 2y$; (4 in 2 u. 3) $= 2x - y + \overset{5}{5a} - 15x + 10y = b$; $x + 3y - 2a + 6x - 4y = \overset{}{\underset{6}{c}}$

abgekürzt u. geordnet — $5a - 13x \overset{7}{+} 9y = b$; $7x - y \overset{8}{-} 2a = c$

aus 7) für x gesucht $x = \frac{5a - b + 9y}{13}$ diesen Werth gesetzt in 8.

$$\frac{35a - 7b + 63y}{13} - y - 2a = c.$$

$$35a - 7b + 63y - 13y - 26a = 13c$$

$$50y = \frac{7b + 13c - 9a}{50}$$ welcher

derselbe Werth ist den wir auf dem ersten Wege

durch Eliminiren von y erhalten.

x u. z zu finden verfährt man nun nach dieselbe Weise wie beim Eliminiren.

In der Anwendung können nun nicht mehr in jeder gegebenen Gleichung alle unbekannten Größen vor, und man kann daher den 1ten Weg nicht immer anwenden. dieser Weg ist aber überall anzuwenden, und nächstdem daß er weit einfacher ist als jener, hat er noch den Vortheil daß er weit kürzer ist.

3te Weg durch Addition und Subtraction

Man muß also wie oben schon gezeigt ist so machen daß eine der unbekannten Größen wegfallen muß. Welche Gleichung man nun aber [illegible] Größen von der andern abzieht das muß man aus der Folge sehen, daß man z.B. die Größe die man heraus heraus schaffen will positiv erhält:

$1)\ 3x - 2y + z = a;\quad 2)\ 2x - y + 5z = b,\quad 3)\ x + 3y - 2z = c.$

um z zuerst herauszuschaffen aus 1) und 2). so X [illegible] 1 × 5 =

$$\begin{aligned} -15x \mp 10y \pm \cancel{5z} &= -5a; \\ 2x - y + \cancel{5z} &= b \\ \hline 4)\ -13x + 9y &= b - 5a \end{aligned}$$

und No 1 & 3.

$$\begin{aligned} 6x - 4y + \cancel{2z} &= 2a \\ x + 3y - \cancel{2z} &= c \\ \hline 5)\ 7x - y &= 2a + c. \end{aligned}$$

Soll nun aus No 4 und 5 x geschafft werden so [illegible] multipliciren also:

No 4. × 7 x mal $= \quad -\cancel{91x} + 63y = 7b - 35a$

No 5 × 13 x mal ~~= 13~~ $\underset{+}{-}\cancel{91x} \pm 13y = \underset{+}{-}26a \underset{+}{-}13c.$

$$50y = 7b - 9a + 13c.$$

$$y = \frac{7b - 9a + 13c}{50}$$ wie vorhin.

Noch ein Beispiel welches zugleich beweisen soll daß nicht überall der nächste Weg zu nehmen ist sondern daß hier der 2te vorzüglicher genommen werden muß.

1) $x+y=a$ 2) $y+z=b$ 3) $z+x=c$

7) $x+b-c+x=a$ 5) $y+c-x=b$ 4) $z=c-x.$

) $x=\frac{a-b+c}{2}$ 6) $y=b+x-c$ 12) $z=c-\frac{a-b+c}{2}$

9) $y=b-c+\frac{a-b+c}{2}$ 13) $z=\frac{2c-a+b-c}{2}$

10) $y=\frac{2b-2c+a-b+c}{2}$ 14) $z=\frac{b+c-a}{2}$

11) $y=\frac{b+a-c}{2}$

Es geht auch durch Elimin.

$x=a-y$
$x=c-z$
und 2.

$a-y=c-z$
$y=z+a-c$
$y=b-z$
$z+a-c=b-z$
$2z=b+c-a$
$z=\frac{b+c-a}{2}$

auch durch Addition

$x+y=a$
$z+y=b$
$x-z=a-b$
$x+z=c$
$2x=a+c-b$
$x=\frac{a-b+c}{2}$

Wäre nun aber zum B. folgende Aufgabe gegeben

$\overline{x+y}^{1}=a;$ $\overline{y+z}^{2}=b;$ $\overline{z+v}^{3}=c;$ $\overline{v+x}^{4}=d;$

so würde man wenn man aufzulösen anfängt nur eine unbekannte Größe wegschaffen suchen und also die Aufgabe gar nicht auflösen (d.h. einer unbestimmten Analysis) lassen. Untersucht man sie aber genauer so wird man finden daß diesen Gleichungen die Grundbedingung fehle, d.h. daß sie nicht wesentlich von einander verschieden sind, denn es addire man 1 & 3, & 2 & 4;

$x=a-y$
$v+a-y=d$
$y=v+a-d$
$x+v+a-d=a$
$x=a-v-a+d$
$v+a-v-a+d=d$
$d=d.$

$$\begin{array}{l} x+y=a \\ z+v=c \\ \hline x+y+z+v=a+c; \end{array} \qquad \begin{array}{l} y+z=b \\ v+x=d \\ \hline x+y+z+v=b+d; \end{array}$$

Bei der Auflösung solcher Aufgaben muß man überhaupt vorzüglich auf die Form der Gleichungen sehen; bemerkt man gleich daß sie alle nach einem gewissen Gesetze fortschreiten so muß man auch in der Auflösung dasselbe Gesetz durchführbar machen. z.B.

$$\text{I}\ \frac{2}{x} - \frac{3}{2y} + \frac{1}{z} = a \qquad \text{II}\ \frac{1}{2x} + \frac{2}{3y} - \frac{4}{3z} = b\,; \qquad \text{III}\ \frac{2}{3y} - \frac{2}{x} + \frac{3}{4z} = c$$

2)

$$\frac{2}{2x} - \frac{3}{4y} + \frac{1}{2z} = \frac{1}{2}a \qquad \frac{2}{2x} + \frac{4}{3y} - \frac{8}{3z} = 2b\,; \qquad \text{I}\ -\frac{3}{2}y + \frac{2}{x} + \frac{1}{z} = a$$

$$\text{I}\ \underset{-}{+}\frac{2}{2x} \underset{+}{-} \frac{3}{4y} \underset{-}{+} \frac{1}{2z} = \underset{-}{}\frac{1}{2}a \qquad -\frac{5}{6y} + \frac{7}{4z} = a + c\ \text{IV}$$

$$\frac{25}{12y} - \frac{19}{6z} = 2b - \frac{1}{2}a$$

Die Gleichung IV mit $\frac{5}{2}$ ×irt −IV. $-\frac{25}{12}y + \frac{35}{8z} = \frac{5}{2}a + \frac{5}{2}c$

addirt =

$$\frac{29}{24z} = 2a + 2b + \frac{5}{2}c$$

$$29 = z(48a + 48b + 60c)$$

$$z = \frac{29}{48a + 48b + 60c}$$

Wenn man nun z in IV substituirt findet man y und dieses substituirt in I, II od. III ergiebt endlich x.

Noch ein Beispiel mit lauter Buchstaben theils um zu sehen wie viel Kunstgriffe man sich bedient zum Theil welcher bewegen, und schneller zum Ende zu gelangen: 76.

I $\quad ~~d~~ax + by + cz = m$

II $\quad dx + ey + fz = n;$

III $\quad gx + hy + iz = p.$

a) $$\frac{dx + ey + fz = n;}{adx + aey + afz = an;}$$

$$\begin{array}{l} adx + bdy + cdz = dm \\ \underline{\pm adx \pm aey \pm afz = \pm an} \\ \text{IV}\quad y(bd - ae) + z(cd - af) = dm - an \end{array}$$

$\frac{g}{a}$. I und III x [illegible].

$$\begin{array}{l} agx + bgy + cgz = gm \\ \underline{\pm agx \pm ahy \pm aiz = \pm ap.} \\ \text{V}\quad y(bg - ah) + z(cg - ai) = gm - ap. \end{array}$$

Nennen wir nun der kürzern Anschauung wegen

$(bd - ae) = a'$

$(cd - af) = b'$ [illegible] z.B.: $\frac{af}{b} = \frac{c}{d}$

$(bg - ah) = c'$ giebt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ oder $\frac{af}{b} = m$

$(cg - ai) = d'$ [illegible]

$(dm - an) = m'$

$(gm - ap) = n'$

so in IV $\quad a'y + b'z = m'$ mit c' x [illegible]; $\quad a'c'y + b'c'z = c'm'$

und V $\quad c'y + d'z = n'$ mit a' x [illegible]; $\quad \underline{\pm a'c'y \pm a'd'z = \pm a'n'}$

$$z(b'c' - a'd') = c'm' - a'n'$$

und $$z = \frac{c'm' - a'n'}{b'c' - a'd'}$$ setzt man nun

in die [illegible] Buchstaben ihre Werthe, so ist:

$$z = \frac{(bg - ah)(dm - an) - (bd - ae)(gm - ap)}{(cd - af)(bg - ah) - (bd - ae)(cg - ai)}$$

setzt man nun auch hier den Werth für z in IV. u. V so erhält man y und [illegible] daß die Werthe von z und y in I. II. u. III auch x. Suchen wir ~~auch~~ y [illegible]

die Gleichung IV u. V a) $$\begin{array}{l} \underline{a'y + b'z = m'} \\ a'd'y + b'd'z = d'm' \\ \underline{\pm b'c'y \pm b'd'z = \pm b'n'} \\ y(a'd' - b'c') = d'm' - b'n' \end{array}$$ und b) $$\begin{array}{l} \underline{c'y + d'z = n'} \\ b'c'y + b'd'z = b'n' \end{array}$$

$$= \quad y = \frac{d'm' - b'n'}{a'd' - b'c'}$$

nun seinen Werth [illegible] ist $$y = \frac{(cg - ai)(dm - an) - (cd - af)(gm - ap)}{(bd - ae)(cg - ai) - (cd - af)(bg - ah)},$$

Wäre nun z. B. ein Fall vorgelegt, als zum Auf-
lösen gegeben, so würde es sich vielleicht weitläufiger zeigen
nach der gewöhnlichen Weise, die Substitution zu
[illegible] und es würde dann am zweckmäßigsten
gehen, so zu verfahren:

$$\frac{xy}{ay+bx} = m \qquad \frac{yz}{cz+dy} = n \qquad \frac{zx}{ex+fz} = p$$

$$\frac{ay+bx}{xy} = \frac{1}{m} \qquad \frac{cz+dy}{yz} = \frac{1}{n} \qquad \frac{ex+fz}{zx} = \frac{1}{p}$$

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = \frac{1}{m} \qquad \frac{c}{y} + \frac{d}{z} = \frac{1}{n} \qquad \frac{e}{z} + \frac{f}{x} = \frac{1}{p} \quad \text{durch } f.$$

$$\frac{a}{x} = \frac{1}{m} - \frac{b}{y} \;\boxed{\beta} \qquad \frac{c}{y} = \frac{1}{n} - \frac{d}{z} \;(\alpha) \qquad \frac{e}{fz} + \frac{1}{x} = \frac{1}{fp} \quad \times a.$$

$$\frac{ae}{fz} + \frac{a}{x} = \frac{a}{fp}$$

für $\frac{a}{x}$ den Werth in β. $\frac{ae}{fz} + \frac{1}{m} - \frac{b}{y} = \frac{a}{fp}$ durch b

$$\frac{ae}{bfz} + \frac{1}{bm} - \frac{1}{y} = \frac{a}{bfp} \quad \times c$$

$$\frac{ace}{bfz} + \frac{c}{bm} - \frac{c}{y} = \frac{ac}{bfp}$$

für $\frac{c}{y}$ den Werth in α. $\frac{ace}{bfz} + \frac{c}{bm} - \frac{1}{n} + \frac{d}{z} = \frac{ac}{bfp}$; $=$

$$\frac{acemnp + cfnpz - bfmpz + bdfmnp}{bfmnpz} = \frac{acmnz}{bfmnpz}; =$$

$$acmnz + bfmpz - cfnpz = acemnp + bdfmnp; \; \& \; z = \frac{mnp(ace+bdf)}{acmn + fp(bm-cn)}$$

77.

Um nun in [illegible] einer Gleichung [illegible] zu [illegible]
[illegible] statt y und z zu substituiren
[illegible], so würde man [illegible] einen neuen [illegible]
[illegible] allen [illegible] Gleichungen [illegible] Fall ist eine [illegible]
[illegible] y [illegible] Nenner [illegible]
[illegible] z.B.

$$\frac{y}{c} = n - \frac{z}{d} \;;\; y = cn - \frac{cz}{d}$$

$$\left\{\begin{array}{l} a = b \\ \text{giebt } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \end{array}\right.$$

$$y = cn - \frac{c(mnp(aec+bdf))}{d[aemn+fp(bm-cn)]} =$$

[illegible] von x [illegible] auch so [illegible]
$x =$ [illegible]

$$\frac{x}{a} = m - \frac{y}{b} \;;\; x = am - \frac{ay}{b} \;;$$

$$x = am - \frac{a}{b}\left(\frac{cnmp(aec+bdf)}{d(aemn+fp(bm-cn))}\right).$$

* * *

[illegible] Algebra [illegible]
[illegible] solchen Aufgaben [illegible]
[illegible] bekannten [illegible]
[illegible] Größen und [illegible] gegebenen [illegible]
[illegible] die unbekannten Größen zu finden.
[illegible]
[illegible] unbekannte Größen

NB Man könnte allenfalls Veränderung der Gleichung auch die Art vornehmen, daß man die Bruchform derselben umkehrt ohne die Gl. zu ändern. Allein (gleich) in diesem Falle müßten die Theile der Gl. in einem Ausdrucke geschehen seyn z.B.: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ giebt $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ oder $\frac{a}{b} = m$ giebt $\frac{b}{a} = \frac{1}{m}$ oder $\frac{a}{b} = \frac{1}{m}$ giebt $\frac{b}{a} = m$, unter a, b, m [illegible] und einen Ausdruck Glieder verstanden die aber sämtlich nur einen Bruch ausmachen. der Grund davon ist klar, denn gleiche Brüche = sind durch das Verhältniß des Zählers zum Nenner oder des Dividenden zum Divisor, so sind sie auch gleich durch das umgekehrte Verhältniß des Divisors zum Dividenden. Ist aber die Theile der Gl. nicht in einem Ausdruck gefaßt alsdann wird durch die Umkehrung die Gl. nothwendig geändert, denn jeder Theil hat verschiedene Bestandtheile, und diese werden nicht auf dieselbe Weise geändert, wenn man sie umgekehrt [illegible]. Aus diesem Grunde ist das Beispiel p. 72 richtig, das pag. 73 falsch. - Die [illegible]

$\frac{xy}{ay+bx} = m$ giebt $xy = aym + bmx$

$(y-bm)x = aym$

$x = \frac{aym}{y-bm}$

dasselbe giebt $\frac{ay+bx}{xy} = \frac{1}{m}$

$may + bxm = xy$

$amy = (y-bm)x$

$\frac{amy}{y-bm} = x$

Ebenso $\frac{c}{y} = \frac{1}{n} - \frac{d}{z}$

$\frac{1}{y} = \frac{1}{cn} - \frac{d}{cz}$

$1 = \frac{y}{cn} - \frac{dy}{cz}$

$cncz = czy - cndy$

$cnz = zy - ndy$

α) $y = \frac{cnz}{z-nd}$

$\frac{y}{c} = n - \frac{z}{d}$ giebt ganz was anders

$y = cn - \frac{cz}{d} = \frac{(nd-z)c}{d}$

Man müßte also $\frac{c}{y} = \frac{1}{n} - \frac{d}{z}$ erst in $\frac{c}{y} = \frac{z-nd}{nz}$ verwandeln, dabei kommt die rechte Seite ein Bruch heraus wird, und dann umkehren so wird $\frac{y}{c} = \frac{nz}{z-nd}$

$y = \frac{cnz}{z-nd}$ wie bei α)

Ein schlagendes Beispiel einer der Sache nach [illegible].

verschieden sind, und daß man ihnen diese eine nothwendig unter einander wesentlich verschiedene zeigen. Nun entsteht aber die Frage, welches sind die Regeln wonach bei einer Aufgabe eine oder mehrere Gleichungen ausgedrückt werden können? Genaugenommen läßt sich aber keine, wenigstens keine allgemeine Antwort geben. Die Aufgaben sind so mannigfaltiger Art, daß fast jede ihre eigenen Regeln haben müßte, und die Erfahrung bleibt daher nur die Probe der Übung und der eigene Scharfsinn. (Uflacker. Meyer Hirsch).

Die Hauptregeln wären folgende:

1) man muß zuförderst bei Auflösung einer Aufgabe die unbekannten Größen genau von den bekannten unterscheiden. Es muß ja genau die Verbindung zeigen, in denen diese unbekannten Größen mit den bekannten stehen, nicht allein wenn Bestimmung der Gleichungen [illegible] auf ihre eigene Bedeutung sagen; dann erst kann und wird man mit weniger unbekannten Größen zu thun hat als man anfangs glaubte.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Einer Zahl Hälfte, Drittel, und Viertel soll 3 weniger betragen als die Zahl selbst.

Bezeichnet man die Zahl mit x. so ist

$$\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{4}x + 3 = x$$

$$6x + 4x + 3x - 36 = 12x$$

$$\underline{x = 36.}$$

[illegible]

II Aufgabe.

Wenn die Summe $= s$ und Differenz $= d$ zweier Zahlen gegeben, [illegible]

Bezeichnen wir die Zahlen mit X und y. so ist

$$\begin{array}{ll} x+y = s. & x-y = d \\ \underline{-x+y = d} & \underline{x+y = s.} \\ 2y = s-d & 2x = s+d \\ y = \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}d & x = \tfrac{1}{2}s + \tfrac{1}{2}d. \end{array}$$

[illegible] $\tfrac{1}{2}$ [illegible]

$$\begin{array}{ll} x & x-s+x = d \\ s-x & 2x = d+s \\ & x = \frac{d+s}{2} \end{array}$$

$$y = \frac{2s-d-s}{2} = \frac{s-d}{2}$$

Mengen und die frühern Summen weniger der halben Differenz.

Obgleich bei dieser Aufgabe 2 unbekannte Größen hier gesucht worden sind, so ist es übrigens nur nöthig eine zu suchen, indem sie sich sogleich aus der Summe die andere ergiebt. 36.

Ist nun die zu suchende Größe die z. so ist die andere $s-z$. also:

$$z-(s-z)=d\,;$$

$$2z-s=d$$

$$\underline{z=\frac{s+d}{2}}\,;$$ daraus ergiebt sich, daß die andere Größe $s-z$ ist, wenn man für z seinen Werth setzt:

$$\underline{s-z}=s-\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}d\,;\ =\underline{\tfrac{1}{2}s-\tfrac{1}{2}d}$$

welches mit umgekehrter Auflösung übereinstimmt der Fall war.

Seite 72 folgt Schl.

Aufgabe.

Eine Zahl a in vier Theile x, y, z, w zu theilen welche sich wie 4 gegebene Zahlen m, n, p, q. gegen einander verhalten sollen.

Die Bedingung der Aufgabe giebt also folgendes.

$+y+z+w = a$ und $x:y:z:w = m:n:p:q$

$x:y = m:n$ ~~$y:z = n:p$~~ ~~$z:w = p:q$~~

$ym = xn$ ~~$zn = yp$~~ ~~$wp = zq$~~

$y = \frac{nx}{m}$ ~~$z = \frac{py}{n}$~~ ~~$w = \frac{qz}{p}$~~

$x:z = m:p$ $x:w = m:q$

$x = \frac{zm}{p}$ $x = \frac{mw}{q}$

$z = \frac{px}{m}$ $w = \frac{xq}{m}$

Setzt man nun die zuerst gefundenen Werthe für y, z und w, die durch bekannte Zahlen und x bestimmt wurden, so ist

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} + \frac{qx}{m} = a$$

$$mx + nx + px + qx = am$$

$$x = \frac{am}{m+n+p+q}$$

$x : 1 = am : m+n+p+q$
$x : a = m : m+n+p+q$

y war $= \frac{nx}{m} = \frac{n}{m}x$ mithin. $m+n+p+q : a = m : x$.

$$y = \frac{an}{m+n+p+q};$$

z war $= \frac{px}{m} = \frac{p}{m}x$ also.

$$= \frac{ap}{m+n+p+q}$$

w war $= \frac{qx}{m} = \frac{q}{m}x$. also.

$$w = \frac{aq}{m+n+p+q}$$

Wie bekannt läßt sich nun zum Beweis der einen

Größe gleich ist, weil diese in einer Proportion steht

ist $a = \frac{bc}{d} = d : b = c : a$.

od. $a = \frac{m}{n} = n : 1 = m : a$

Dies heißt angewendet giebt für ungleiche Verhältnisse folgende Proportionen.

Die Gesellschaftsrechnung algebr. aufgelöst.

$$m+n+p+q : a = m : x$$
$$m+n+p+q : a = n : y$$
$$m+n+p+q : a = p : z$$
$$m+n+p+q : a = q : w$$

Wenn also eine Größe nach einem gewissen Verhältniß getheilt werden soll, so addirt man alle Verhältnißzahlen und schließt:

Wie d. Summe aller Verhältnißzahlen, sich zur Zahl a verhält, so verhält, sich jede einzelne Verhältnißzahl, zu einem der gesuchten Theile.

Hierauf beruht sich nun die sogenannte Gesellschaftsrechnung, die sehr häufig in Anwendung kommt.

Aufgabe

Es sollen zu einem gewissen Zweck 200 Rubel von verschiedenen Dorfschaften gegeben werden:

worin Anzahl der Arbeitsfähigen Leute verschieden ist. z.B.

1 soll haben 800 also hier ist $m+n+p+q = 4000$
1200
900 $a = 200.$
1100 das Verhältniß $4000 : 200 = 20 : 1.$
4000

$20 : 1 = 800 : x = 40$ Mann
$20 : 1 = 1200 : y = 60$ —
$20 : 1 = 900 : z = 45$ —
$20 : 1 = 1100 : w = 55$ —
= 200 Mann.

Aufgabe.

Ein Eimer Wein kostet von A, 8 Gulden = a fl
ein Eimer des Weins B kostet b = 12 Gulden. Man
will 1000 Eimer = m Eimer mischen, wovon
der Eimer 10 = n Gulden kosten soll.
Nennen wir die Anzahl der Eimer von der Weinsorte A = x so ist die Anzahl der andern die zur
Mischung genommen werden müssen 1000 − x. Die
Sorte A die zur Mischung bestimmt ist, also ax fl
kosten und diese B der Eimer b(1000 − x) muß = seyn
dem Preise von m × n. Daher erhält:

$ax + b(\overset{m}{1000} - x) = mn$ Für die andere Sorte $m - x = y$ ist
$ax + bm - bx = mn$ $\quad y = m - \frac{mn - bm}{a-b} = \frac{am - bm - mn + bm}{a-b}$
$ax - bx = mn - bm$ $\quad y = \frac{m(a-n)}{a-b}$
$x = \frac{m(n-b)}{a-b}$

Abschnitt IV wird der zu bekannten Dinge wegen übergangen aber

Abschnitt V.

Dieser Abschnitt ist von großer Wichtigkeit, nicht allein für Zahlen sondern auch im weiteren Verfolg der Analysis.

Die nächste Anwendung betrifft nun die Darstellung von Brüchen, ~~welche~~ die in zu unbehülflichen Zahlen ausgedrückt sind, und wenn man ~~sie~~ ihn ~~zu~~ hinreichend genau aber bedeutend zu schreiben in kleinen Zahlen ausdrücken will.

Kettenbrüche

Die Ausdrücke Zusammenhängende, continuirliche u. Kettenbrüche sind gleichbedeutend.

Ein Kettenbruch ist ein gemischter Bruch mit der Bemerkung daß er aus einer ganzen Zahl besteht und dem Zusatze eines Bruches mit der Eigenthümlichkeit, daß der Zähler immer 1, und der Nenner eine ganze Zahl ist. welche ~~+~~ Zusatz einen solchen Bruch ist. Die ganze Zahl am Anfange kann übrigens fehlen, und sie zeigt blos an ob der Bruch ein ächter oder unächter war, z. B.

z.B. $4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{6+\dots}}}}$ oder $\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}$

Wenn man einen Bruch in einen Kettenbruch verwandeln soll, so braucht das ganze Verfahren voraus daß wenn Zähler und Nenner mit einerlei Zahl dividiren ~~und~~ kann ohne den Werth des Bruchs zu ändern; Indem ich nun bei einem solchen ächten Bruch, (die unächten macht ich gehörig durch Absonderung der Ganzen davon) Zähler und Nenner jedesmal durch den Zähler dividire, sieht man leicht daß ich zum neuen Zähler nothwendig immer 1 erhalten muß.

Diese Operation des Dividirens des Bruchs durch seinen eigenen Zähler setzt man nun so lange fort bis man ~~[illegible]~~ auf einen ~~Bruch~~ ursprünglichen stößt dessen Zähler $= 1$ ist, wo also wie bekannt die Division aufhören muß. Die Operation wäre also folgende. Es sey zu verwandeln:

$\frac{29.39}{1270}$

$$\begin{array}{r|l} 1270 & \\ 29.39 & 2 \\ 2540 & \\ \hline 399 & \end{array} \quad 2+\frac{399}{1270} = 2+\cfrac{1}{3+\frac{73}{399}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\frac{34}{73}}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\frac{5}{34}}}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\frac{4}{5}}}}} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}$$

$$\begin{array}{r|l} 1270 & 3 \\ 1197 & \\ \hline 73 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 399 & 5 \\ 365 & \\ \hline 34 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 73 & 2 \\ 68 & \\ \hline 5 & \\ 34 & 6 \\ 30 & \\ \hline 4 & \\ 5 & 1 \\ 4 & \\ \hline 1 & \\ 4 & \end{array}$$

$2+\frac{399}{1270}$ $\quad \frac{399}{1270}=\cfrac{1}{3+\frac{73}{399}}$ $\quad \frac{73}{399}=\cfrac{1}{5+\frac{34}{73}}$

$2+\cfrac{1}{3+\frac{73}{399}}$ $\quad 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\frac{5}{34}}}}$ $\quad 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{4+\frac{1}{4}}}}}}$ $\quad \frac{34}{73}=\cfrac{1}{2+\frac{5}{34}}$

$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\frac{34}{73}}}$ $\quad \frac{5}{34}=\cfrac{1}{6+\frac{4}{5}}$ $\quad \frac{4}{5}=\cfrac{1}{1+\frac{1}{4}}$

Um nun also allgemein einen gewöhnlichen Bruch $\frac{A}{B}$ in einen Kettenbruch zu verwandeln, ~~fängt~~ so ist das Verfahren dabei folgendes.

Man dividire den Zähler A durch den Nenner B, merke den herauskommenden Quotienten und den Rest; durch diesen Rest dividire man den Nenner B, und merke wiederum Quotient und Rest. Mit diesem Rest dividire man den nächst vorhergehenden Rest, und merke wieder Quotient u. Rest, und so fahre man in der Division jedes vorhergehenden Restes durch den zuletzt erhaltenen Rest fort, bis man auf einen Rest = 0 od. 1 kommt, wo alsdann natürlich die Division aufhören muß. also

Quotient = C D E F G ...
Reste = a b c d e ....

$$\frac{A}{B} = C + \frac{a}{B};$$
$$\frac{B}{a} = D + \frac{b}{a};$$
$$\frac{a}{b} = E + \frac{c}{b}$$
$$\frac{b}{c} = F + \frac{d}{c}$$
$$\frac{c}{d} = G + \frac{e}{d} \text{ u. s. w.}$$

Nun ist aber $\frac{a}{B}$ weiter nichts als $\frac{1}{D+\frac{b}{a}}$

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{E+\frac{c}{b}} \quad ; \quad \frac{c}{b} = \frac{1}{F+\frac{d}{c}} \quad ; \quad \frac{d}{c} = \frac{1}{G+\frac{e}{d}} \ldots$$

also ist der gegebene Bruch =

$$\frac{A}{B} = C + \cfrac{1}{D + \cfrac{1}{E + \cfrac{1}{F + \cfrac{1}{G + \frac{c}{d}}}}}$$

Einen ächten Bruch kann man also in einen Kettenbruch nur auf dieselbe Art verwandeln, wenn man auch eben angegebenen Operation vornimmt. Ein neuer Bruch dessen Zähler 1 und Nenner der ~~erste~~ 2te Quotient ist, und neuen Bruch dessen Zähler wieder 1 und der Nenner d. 3te Quotient nicht ein ebenso fortgesetzter Bruch ist u. s. f.

Stellt man nun z. B. Seite 81 (hier) die nach und nach erhaltenen Theile des ~~erhaltenen~~ Kettenbruchs nebst der ganzen erhaltenen Zahl 2 in eine Bruchform wieder vereinigt so erhalten wir Partial- od. Näherungsbrüche.

Partial Brüche

Näherungsbruch heißt ein solcher Bruch deshalb weil er sich dem gegebenen ~~Bruch~~ Werth des Bruchs, nähert, aber nicht vollkommen gleich ist. Je mehr man neue solche Theile des Bruchs zusammennimmt desto näher kommt man dem wahren Werth des Bruchs, bis er endlich den Bruch selbst wieder erhält.

+ oder der 1te Partialbruch

Es kommt darauf an sich leicht die sp. 85 angeführte Tabelle zu verschaffen. — Ist der Kettenbruch ..., und dann ist das 1te Glied des Kettenbr.† eine ganze Zahl und zwar der erste Quotient selbst (2), daher muß der erste Hülfszähler 1 sein, dann 1 multipliziert den Quotienten nicht. Dieser 1 ist zugleich der Zähler von $\frac{1}{3}$ und damit dieser nun zum Producte 2×3 addirt zu werden, um den 2ten Zähler zu bilden (7).

Weil der zwei ersten Nenner erhalten wird, so macht man auch voraus 1 als ersten Nenner und stände dann 2×0=0, daher ist es besser die 0 als Hülfszahl nicht zu gebrauchen, sondern, da bei einem unächten Bruche der erste P.B. ganze Zahl ist, und daher der erste Nenner 1 sein muß, so stelle man die Regel auf, daß der Nenner eines 1ten P.B. = 1 ist.

Der 2te Quotient ist der 1te Nenner im Kettenbr. und ... d. wird durch 1 multipl. nicht verändert, und es ist auch nichts zu addiren. Ist nun der K.B. $2+\frac{1}{3}$ so sind die beiden P.brüche $\frac{2}{1}+\frac{7}{3}$ wie leicht einzusehen ist.

Zu unserm Beispiele hier 81 waren also die nach und nach erhaltenen Theile des Kettenbruchs

$$\frac{2939}{1270} = 2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4}}}}}}$$

d. erste Theil ---- $\frac{2}{1}$

der zweite Theil $2+\frac{1}{3}$ giebt $\frac{7}{3}$

d. erste 3 bis 3te $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5}}$ ---- $\frac{37}{16}$

d. 1te bis 4te $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}$ ---- $\frac{81}{35}$.

d. 1te bis 5te $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{6}}}}$ ---- $\frac{523}{226}$

d. 1te bis 6te $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{6+\frac{1}{1}}}}}$ ---- $\frac{604}{261}$

d. 1te bis 7te $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2+\frac{1}{6+\frac{1}{1+\frac{1}{4}}}}}}$ ---- $\frac{2939}{1270}$

das ist zuletzt der ursprünglich gegebene Bruch, (der derselbe wieder erhalten muß) ist sehr einleuchtend indem er stellt sich nämlich nach einander alle seine Theile wieder zusammengenommen habe.

Dies Verfahren aber ist sehr weitläufig, es wird entwickelt aus dem vorstehenden, und kürzer wird man einen auch hier allgemein ersehen wie (hier Seite 83), um aber noch kürzer zum Ziele gelangen, würde man nie für unter der Bruch ist die vorgeschriebene Art nach und nach [illegible] ist veränderbar. zu [illegible] [illegible] Rest kein Bruch anzuschreiben. Setzen nun [illegible] abermals nach [illegible] Tabelle. Schreibe in eine Rubrik alle Quotienten, dann die Zähler zugehörigen Nenner. Ist d. Bruch ächt, so erhält der Nenner 1 d. Zähler 0, ist er unächt so umgekehrt. Die ~~nächstfolgenden~~ Zähler findet man nun wenn man ~~aus~~ den nächstfolgenden Quotienten mit [illegible] multiplicirt u. den unmittelbar darüber stehenden Zähler addirt. Eben so findet man die Nenner wenn man dasselbe beim Nenner thut. Man sehe die Tabelle.

```
 1270 |
 2939 | 2
 2540
- 399 | 3
 1270
 1197
-  73 | 5
  399
  365
-  34 | 2
   73
   68
-   5 | 6
   34
   30
-   4 | 1
    5
    4
-   1 | 4.
    4
    4
-   0
```

Quotient	Zähler 1	Nenner 0
2	2	1
3	7	3
5	37	16
2	81	35
6	523	226
1	604	261
4	2939	1270

Um den 3ten N.B. zu bilden muss zu $\frac{7}{3+\frac{1}{5}}$ addirt werden das wäre aber falsch denn $\frac{1}{5}$ ist nicht zu $2+\frac{1}{3}$ also auch nicht zu $\frac{7}{3}$, sondern lediglich dem Nenner 3 im Bruche $\frac{1}{3}$ angehängt der Kettenbruch muss also in seiner vollständigen Form $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5}}$ = geschrieben und von hinten entwickelt werden (wie bei [illegible] Brüchen) $= 2+\frac{1}{\frac{16}{5}} = 2+\frac{5}{16} = \frac{2\times 16+5}{16} = \frac{37}{16}$. Von oben kann man ihn nicht entwickeln, denn 2 soll ja nicht zu $\frac{1}{3}$ sondern zu $\frac{1}{3}+\frac{1}{5} = \frac{5}{16}$ addirt werden. Die Entwicklung des Nenners des 3ten N.B. sehen wir nun, es ist 5 der 3te Quot × mit 3 dem 2ten Nenner + 1 dem 1ten Nenner. Nimmt man nun $\frac{7}{3+\frac{1}{5}} = \frac{35}{16}$ an, so ist der N.Bruch nicht richtig, kann aber durch Addirung des vorhergehenden Zählers 2 $\left(\frac{2}{16}\right)$ gut gemacht werden denn $\frac{35}{16}+\frac{2}{16}=\frac{37}{16}$

Es wird also der 3te Quot mit dem 2ten Zähl ×, und der 1te Zähler addirt. Beim 4ten N.B. ist es eben so $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}} = 2+\frac{1}{3+\frac{2}{11}} = 2+\frac{11}{35} = \frac{81}{35}$ Nimmt man aber $\frac{37}{16+\frac{1}{2}}$ an $= \frac{74}{33}$ so sind wieder die Zähler und Nenner um $\frac{7}{3}$ respective von einander verschieden, aber warum heißt es so um ??? — Eine ausführliche Einsicht gewährt das Exempel p. 87 in allgem: Ziffern. — Ist der Bruch ächt alsdann ist der erste N.B. 1 und dem ersten Quot. als Nenner der Zähler brauchs alsdann kleiner [illegible], und der Nenner soll zur selben 1. welches mit dem [illegible] gen, und zum 2 [illegible]

es wird auch am [illegible] jetzt einmal die Grösse jedes Partialbruchs zu untersuchen, am leichtesten [illegible] die Brüche [illegible] einerlei Nenner zu bringen hat, wird also durch Decimalbrüche geschehen [illegible]

der Partialbruch $\frac{2}{1} = 2,000000$ zu klein
der Partialbruch $\frac{7}{3} = 2,333333$ z. gross
——— $\frac{37}{16} = 2,3125$ z. klein
——— $\frac{81}{35} = 2,314285$ z. gross
——— $\frac{523}{226} = 2,314159$ z. klein
——— $\frac{604}{261} = 2,314176$ z. gross
——— $\frac{2939}{1270} = 2,3141731 \ldots$

Die Ursach dessen ist leicht daran $\frac{2}{1}$ ist augenscheinlich zu klein weil ein Rest übrig geblieben ist, und wenn $\frac{1}{3}$ dazu, so ist $\frac{7}{3}$ zu gross, weil der Nenner 3 zu klein ist denn es soll hier noch was angehängt werden hängt man ihm $\frac{1}{5}$ an, so ist $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5}}$ zu klein, denn der Schlussbruch ist [illegible] weil der Nenner 5 noch etwas an- gehängt werden soll, so ist ~~[illegible]~~ zu gross. [illegible] zu kleineren hängt man an 5 $\frac{1}{2}$ an so ist der Bruch $2+\frac{1}{3+\frac{1}{5+\frac{1}{2}}}$ zu gross, denn wenn hier wieder $\frac{1}{5}$ zu sehr verkleinert, indem zu 2 noch was angehängt werden soll u. s. f.

[illegible] Decimalbrüche, [illegible] Partialbrüche [illegible] so wird man finden dass [illegible] ja nicht [illegible] Theile des Kettenbruchs [illegible] den wahren Werth [illegible] bald zu klein bald zu gross [illegible] die Partialbrüche sind [illegible] der Natur der Partialbrüche [illegible] Näherungsbrüche [illegible] gehandelt, indem sie in den angenommenen [illegible] allen practischen Fällen [illegible]

[illegible] sind. [illegible] genau [illegible]
[illegible] einem [illegible]
[illegible] Decimalbruch, so ist [illegible]
[illegible] in kleinern Zahlen
auszudrücken, so [illegible]
[illegible] Näherungsbrüche [illegible]
[illegible].

bis man an den letzten Bruch kommt, der doch [illegible] ist.

Wenn man nun das obengesagte [illegible] allgemeinen Bruch $\frac{A}{B}$ anwendet, so wird man auch finden [illegible] die Quotienten [illegible] die Zahlen [illegible] Bruch $\frac{A}{B} = C+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{E+\cfrac{1}{F+\cfrac{1}{G}}}}$ darstellt [illegible] folgende Tabelle [illegible] machen kann.

$$\overset{\times}{A}+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{E+\cfrac{1}{F+\cfrac{1}{G}}}}$$

$$C+\frac{1}{D}=\frac{CD+1}{D} \quad \underline{1r\ B.}$$

$$C+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{E}}=C+\frac{E}{DE+1}=$$
$$=\frac{CDE+C+E}{DE+1} \quad \underline{2r\ B.}$$

Quotient	Zähler	Nenner
	1	0
C	C	1
D	CD+1	D
E	CDE+E+C	ED+1.
F	CDEF+EF+CF+CD+1	DEF+F+D
G	CDEFG+EFG+CFG+CDG+G+ CDE+E+C	DEFG+FG+DG+ED+1.

$$C+\cfrac{1}{D+\cfrac{1}{E+\cfrac{1}{F}}}=C+\cfrac{1}{D+\frac{F}{EF+1}}=C+\frac{EF+1}{DEF+D+F}=\frac{CDEF+CD+CF+EF+1}{DEF+D+F}=\underline{3r\ B}$$

Ob nun dies Verfahren richtig sey wird d. folgende Beweis d. vollständigen Ausdrucks zeigen.

Quot.	Zähler	Nenner
	1	0
C	C	1
D	CD+1	D
E	CDE+E+C	ED+1
F	CDEF+EF+CF+CD+1	EDF+F+D
G	CDEFG+EFG+CFG+CDG+G+CDE+E+C	EDFG+FG+DG+ED+1
⋮	⋮	⋮
(n-2) M	α	β
(n-1) N	γ	δ
nte P	γP+α	δP+β
(n+1) Q	γPQ+αQ+γ	δPQ+βQ+δ

$$\frac{A}{B} = C + \cfrac{1}{D + \cfrac{1}{E + \cfrac{1}{F + \cfrac{1}{G \ldots}}}}$$

$$\ldots + \cfrac{1}{M + \cfrac{1}{N + \cfrac{1}{P + \cfrac{1}{Q}}}}$$

der Näherungsbruch von C an bis auf: $\frac{1}{M} = \frac{\alpha}{\beta}$

der Näherungsbruch v. C bis auf $\frac{1}{N} = \frac{\gamma}{\delta}$

so wird nach d. Tabelle der Bruch bis $\frac{1}{P}$ = seyn

$\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}$ u. der bis $\frac{1}{Q} = \frac{\gamma PQ+\alpha Q+\gamma}{\delta PQ+\beta Q+\delta}$;

Ob nun dies auch denn der Fall ist, muß bewiesen werden, wenn wir den Bruch wirklich so wie d. Tabelle suchen. f. dem Näherungsbruch [illegible] dieselbe setze man in dem nten Näherungsbruch da der Kettenbruch b. P noch nicht aufhört, $(P+\frac{1}{Q})$ statt P und man erhält.

$$\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta};\quad \frac{\gamma(P+\frac{1}{Q})+\alpha}{\delta(P+\frac{1}{Q})+\beta} = \frac{\gamma PQ+\gamma+\alpha Q}{\delta PQ+\delta+\beta Q}$$

welches dasselbe ist wie in der Tabelle, der also [illegible] der (n+1)te u. nte Partialbruch eben so entsteht ist als der nte aus dem (n−2)te u. (n−1)te.

Nun fragt es sich aber welches ist denn der Unterschied zwischen zwey auf einander folgenden Näherungsbrüchen? dies soll untersucht werden.

der nte Partialbruch war $\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}$

der (n+1)te ——— $\frac{\gamma PQ+\gamma+\alpha Q}{\delta PQ+\delta+\beta Q}$, die unterschiedliche Benennung gebraucht u. einer vom andern abgezogen giebt:

$$\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}-\frac{Q(\gamma P+\alpha)+\gamma}{Q(\delta P+\beta)+\delta}=\cancel{\frac{Q(\gamma P+\alpha)+\delta(\gamma P+\alpha)}{Q(\delta P+\beta)+\delta}}=$$

$$\frac{Q(\delta P+\beta)(\gamma P+\alpha)+\delta(\gamma P+\alpha)-Q(\gamma P+\alpha)(\delta P+\beta)-\gamma(\delta P+\beta)}{(\delta P+\beta)\left[Q(\delta P+\beta)+\delta\right]}\quad\frac{\alpha\delta-\gamma\beta}{}$$

$$=\frac{\delta(\gamma P+\alpha)-\gamma(\delta P+\beta)}{(\delta P+\beta)\left[Q(\delta P+\beta+\delta\right]};$$

der Unterschied zwischen (n−1)te u. nte wird folgender seyn: der (n−1)te Partialbruch war $\frac{\gamma}{\delta}$; der nte war $\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}$; also

$$\frac{\gamma}{\delta}-\frac{\gamma P+\alpha}{\delta P+\beta}=\frac{\gamma(\delta P+\beta)-\delta(\gamma P+\alpha)}{\delta(\delta P+\beta)};\ \gamma\beta-\alpha\delta$$

Vergleichen wir nun die Differenzen d. nte u. (n+1)te, wie die Diff. d. nte u. (n−1)te Näherungsbruch, so gleichen [illegible] daher kam es, daß die kreuzweisen Producte in der Tabelle je 4 an einander liegenden Gliedern immer um 1 von einander verschieden sind $(CD+1).1=C.D\pm1$ | $(CD+1)(ED+1)=(CDE+E+C)D\pm1$

Die Differenz zweyer aufeinanderfolgenden Brüche ist immer ein Bruch dessen Zähler = 1 und der Nenner immer größer wird. dann ergiebt sich wenn die Tabelle p 88 so ist oder z. B. entstanden durch wenn C × mit D und 1 addirt, giebt wenn man von $\frac{C}{}$ $\frac{CD+1}{D}$ ab so wird C gerade mit D multiplicirt, und also 1 zum Rest geben, das ± dann kommt der 3te Part. B. ist entstanden daß wenn CD+1 mit E ×irt und C addirt, giebt wenn man $\frac{CD+1}{D}-\frac{CDE+E+C}{ED+1}$ ab so wird zwar CDE+E+C mit D ×irt, aber CD mit ED ×irt giebt die 2 ersten Glieder CDE und DE, nun muß CD+E also noch 1 mal genommen werden dadurch fällt das 3te Glied CD weg und es bleibt wieder 1

Eben so verhält es sich mit anderen Differenzen

90

daß nun z. B. aus Primzahlen [illegible] die Zähler [illegible] [illegible] durch [illegible] [illegible]
sich [illegible] geht daraus hervor,
daß durch die Hinzufügung des [illegible] immer wieder Fortsetzung einander gleich sind,
jedes Verhältniß verändert wird
in $C+\frac{1}{D+\frac{1}{E+\frac{1}{F}}}$ z. B. gesetzt $\frac{EF+1}{F}$ ist zu sehen. Denn ist
F gerade und E ~~gerade oder~~ ungerade, so wird
EF gerade und EF+1 ungerade,
ist F ungerade so wird wenn E gerade
ist, EF gerade allein EF+1 nicht
mit F divisibel. Oder der [illegible]
[illegible] Grund ist der, sobald
ist $a+\frac{1}{b}$ gemacht $\frac{ab+1}{b}$ also
so ist ab ein vielfaches von
b, und muß durch 1 nothwendig
verändert werden. Geht man
nun weiter, so verändert sich
immer der Kettenbruch auf
$m+\frac{n}{o}=\frac{mo+n}{o}$ als z. B.
es ist klar daß $\frac{n}{o}$ nicht zu heben sey,
also n [illegible] mit n kein Verhält-
niß, da nun mo ein vielfaches
bildet so wird es durch + n
verändert. u. s. f.

Primzahlen

[illegible] nur mit dem Nenner [illegible] abwechselnd [illegible]
[illegible] Zeichen haben.

Allemal muß die Zähler bei ~~[illegible]~~ 2 in Zahlen gegebenen aufeinanderfolgenden Näherungsbrüchen [illegible] = 1 seyn, und nur bald + bald − zu nehmen [illegible] man ~~[illegible]~~ einen ungeraden Bruch von einem geraden (z. B. $2^{[illegible]}-3^{[illegible]}$) oder umgekehrt $(1^{[illegible]}-2^{[illegible]})$ abzieht.

Die Nenner werden immer größer und daher fällt der Werth des Bruchs immer kleiner.

Kein Näherungsbruch kann aufgehoben werden, wenn auch seine Zähler u. Nenner nicht absolute Primzahlen sind, so sind sie es doch unter sich. Siehe [illegible] § 38. Zus. 3.

§ 39. Aufgabe.

Es sind zwey unter sich Primzahlen gegeben; man soll 2 um 1 verschiedene Verhältnisse von ihnen machen.

z. B. 8773 und 1530.

Auflösung. Man brauchte die Zahlen als einen
un

nächsten Bruch und diese zu diesem nach machen. Die Näherungsbrüche. Die beiden letzten Zahlen sind also dann die gesuchten Zahlen. also.

$\frac{8773}{1530}$

1530 | 8773 | 5
7650
— 1123 | 1530 | 1
1123
— 407 | 1123 | 2
814
— 309 | 407 | 1
309
— 98 | 309 | 3
294
— 15 | 98 | 6
90
— 8 | 15 | 1
8
— 7 | 8 | 1
7
— 1 | 7 | 7
7
— 0.

Quot.	Zähler.	Nenner.
	1.	0
5	3	1
1	6	1.
2	17	3
1	23	4
3	86	15
6	539	94
1	625	109
1.	1164	203
7.	8773	1503.

Je zwei aneinanderliegenden Abschnitten geben 2 Producte die um 1 verschieden sind

$5 \times 0 = 1 \times 1 + 1$
$6 \times 1 = 5 \times 1 + 1$
$17 \times 1 = 6 \times 3 - 1$
$23 \times 3 = 17 \cdot 4 + 1$ etc

und

also hier ist $8773 \times 203 = 1530 \times 1164 - 1$
welches die Aufgabe verlangte.

Auf eben solche Art könnte man nun auch für die in Decimalen ausgedrückte Verhältnißzahl $\pi = 3,14159265\ldots\ldots$ nächste Brüche finden indem man schreibt $\frac{314159265}{100000000}$ und hierzu die Näherungsbrüche suchte. Ausgeführt:

```
 100000000 | 3
 314159265
 300000000
  14159265 | 7
 100000000
  99114855
    885145 | 15
  14159265
   885145
  5307815
  4425725
   882090 | 1
   885145
   882090
     3055 | 288
   882090
   6110
   27109
   24440
    26690
    24440
     2250 | 1
     3055
     2250
```

Quot	Zähler	Nenner	
	1	0	
3	3	1	
7	22	7	Archimedische
15	333	106	
1	355	113	Metius'sche
288	102573	32650	
1	102928	32763	
			u. s. w.

Auch diese Art hat man die bis jetzt bekannten 160 Decimalstellen von π [illegible] in Kettenbrüchen [illegible] bemerkt daß die beiden 32 zifferige Zahlen sind. also welche Unregelmäßigkeit in diesen

Nach P. VI Abschnitt. Seite 134.

Von dem Rechnen mit Wurzelgrößen. cf. pag. 17.

[illegible] heißt jede Größe mit einem Wurzelzeichen und √Größe, hier aber nur eine solche Größe z. B. $b\sqrt[n]{a}$; wo b d. Coëfficient der √Größe genannt wird.

Gleichartig sind diej. die einerlei √ Exp. (d. einerlei Zeiger unter dem √ zeichen haben) als $c\sqrt[n]{a^r}$ und $d\sqrt[n]{a^r}$; ungleichartig $\sqrt[n]{a^x}$ und $\sqrt[m]{a^x}$.

Rationale Größen heißen diejenigen deren Verhältniß zur Einheit vollständig ausgedrückt werden kann, sie mögen als Ganze oder als Brüche u. s. w. erscheinen.

Irrational heißen sie dann wenn das Verhältniß zur Einheit nicht vollkommen ausgedrückt werden kann. Allemal also wenn sich √ braucht, ist der Ausdruck, wenigstens d. Form nach irrational, z. B. √a, weil dies hier allgemein nicht möglich ist. Wenn man werten soll aber ist es möglich daß es rational wird z. B. $a = 25$ $\sqrt{25} = \underline{5}$.

362.

Einen Ausdruck ganz irrational machen.

Man ~~[illegible]~~ erhebe die Größe außer dem √ Zeichen also den Coefficient zur Potenz d. √ Exponents u. multiplicire mit ihr dann die Größe unter dem √ Zeichen.

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}\,;\quad \tfrac{1}{3}a - x\sqrt[3]{bx} = \sqrt[3]{bx\left(\tfrac{1}{27}a^3 - \tfrac{1}{3}a^2x + ax^2 - x\right.}$$

Umgekehrt:

$$\sqrt[n]{a^{mn} b^{2n+3} c^{np+q}} = \sqrt[n]{a^{mn}} \cdot \sqrt[n]{b^{2n+3}} \cdot \sqrt[n]{c^{np+q}} =$$

$$= \sqrt[n]{a^{mn}} \cdot \sqrt[n]{b^{2n} \cdot b^3} \cdot \sqrt[n]{c^{np} \cdot c^q} = a^{\frac{mn}{n}} \cdot b^{\frac{2n}{n}} \cdot b^{\frac{3}{n}} \cdot c^{\frac{np}{n}} c$$

$$= a^m \cdot b^2 \cdot c^p \cdot b^{\frac{3}{n}} \cdot c^{\frac{q}{n}} = a^m b^2 c^p \sqrt[n]{b^3 c^q}\,;$$

$$\sqrt[3]{a^5 b^{14} c^9 d^2} = a b^4 c^3 \sqrt[3]{a^2 b^2 d^2}$$

Bei einem Ausdruck wie $\sqrt[2]{a^3x - 4a^2x^2 + 4ax^3}$ muß man die Größe erst in Factoren zerfallen, so daß ein vollständiges Dignität daraus wird; also hier =

$$\sqrt[2]{ax(a^2 - 4ax + 4x^2)} = (a - 2x)\sqrt[2]{ax}.$$

Zahlen müssen wenn es geht eben so in Factoren zerlegt werden. z. B.

$$\sqrt[3]{1024} = \sqrt[3]{8 \cdot 128} = \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 16} = \sqrt[3]{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 2} =$$

$$\sqrt[3]{8^3 \cdot 2} = 8\sqrt[3]{2}\,;$$

$$\sqrt{507} = \sqrt{3 \cdot 169} = \sqrt{3 \cdot 13^2} = 13\sqrt{3}\,;$$

Auf diese Art kann man auch manchmal ein Paar un-
[illegible] scheinende √ Größen gleichartig machen z.B.

$a\sqrt[n]{b^n c} \times g\sqrt[n]{d^{2n} c} = ab\sqrt[n]{c} \times gd^2\sqrt[n]{c} = abd^2g\sqrt[n]{c^2}$

$5\sqrt[3]{2}$ u. $4\sqrt[3]{16} = 5\sqrt[3]{2}$ und $4\sqrt[3]{2\cdot 8} = 5\sqrt[3]{2}$ und $8\sqrt[3]{2}$.

§63. Aufgabe.
Eine √ Größe zu einer Potenz zu erheben.

$(a\sqrt[m]{b})^n = a^n\sqrt[m]{b^n}$; $(2\sqrt[3]{5})^2 = 2^2\sqrt[3]{25} = 4\sqrt[3]{25}$.

Beweis: $a\sqrt[m]{b} = ab^{\frac{1}{m}}$ also $(a\sqrt[m]{b})^n = (ab^{\frac{1}{m}})^n = a^n b^{\frac{n}{m}}$
$= a^n\sqrt[m]{b^n}$;

Zusatz 1.
$(a\sqrt[nr]{b})^n = \underline{a^n\sqrt[r]{b}}$ denn $(a\sqrt[nr]{b})^n = a^n b^{\frac{n}{nr}} = a^n b^{\frac{1}{r}} = \underline{a^n\sqrt[r]{b}}$.

Zusatz 2.
$(a\sqrt[3]{5})^3 = 5a^3$; $(a\sqrt[n]{b})^n = a^n\sqrt[n]{b^n} = a^n b$.

Cf. p. 19.

$\boxed{IX}$. $\underline{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}}$

denn $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n]{a^{\frac{1}{m}}} = ~~\sqrt{}~~(a^{\frac{1}{mn}}) = \sqrt[mn]{a}$

§64. Aufgabe.
Die n^{te} √ aus einer √ Größe zu ziehen.

$\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a^m b}} = \sqrt[nm]{a^m b}$; $\sqrt[3]{2\sqrt{5}} = \sqrt[6]{20}$;

denn da ist $\sqrt[n]{a\sqrt[m]{b}} = \sqrt[n]{ab^{\frac{1}{m}}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{mn}} = a^{\frac{m}{mn}} b^{\frac{1}{mn}} = \underline{\sqrt[mn]{a^m b}}$;

Zusatz I.
Lassen sich Exponent des Coefficienten und der Größe unter √ Zeichen
durch den auszuziehenden √ Exp. divid. so kann dies geschehen.
z.B. $\sqrt[3]{a^6\sqrt[5]{b^3}} = \sqrt[3]{a^6 b^{\frac{3}{5}}} = a^{\frac{6}{3}} b^{\frac{3}{3\cdot 5}} = a^2 b^{\frac{1}{5}} = a^2\sqrt[5]{b}$,
welches sich unmittelbar durch die Exponenten erhalten würde.

Zusatz II.

Deshalb können wir auch bei √Größen den √Exponent u. den Exp. unter dem √Zeichen mit einerlei Zahl Xziren od. dividiren also:

X $\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m.x]{a^{n.x}}$

$$\sqrt[\frac{m}{r}]{a^{\frac{n}{r}}} = \sqrt[m]{a^n} \text{ ; und } \sqrt[m.r]{a^{n.r}} = \sqrt[m]{a^n};$$

§ 65. Aufgabe.

XI $\sqrt[n]{a} = A\sqrt[n]{\frac{a}{A^n}}$

Eine √Größe $a\sqrt[n]{b}$ mit einer Größe A zu Xziren ohne Werth zu ändern;

$$\underset{\sim}{a\sqrt[n]{b}} = aA\sqrt[n]{\frac{b}{A^n}} = \frac{aA}{A}\sqrt[n]{\frac{b}{1}} = \underset{\sim}{a\sqrt[n]{b}};$$

$$2\sqrt[3]{5} = 2.2\sqrt[3]{\frac{5}{8}} \text{ ; } \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{2}{3}.3\sqrt{\frac{3}{45}} = 2\sqrt{\frac{1}{15}};$$

§ 66 Aufgabe.

√Größen, verschiedener √Exponenten in andere zu verwandeln welche einerlei √Exp. haben.

XII $\sqrt{b} + \sqrt[3]{d} = \sqrt[6]{b^3} + \sqrt[6]{d^2}$

$$a\sqrt{b} + c\sqrt[3]{d} = a\sqrt[6]{b^3} + c\sqrt[6]{d^2};$$

$$2\sqrt{5} - 3\sqrt[4]{7} = 2\sqrt[4]{25} - 3\sqrt[4]{7};$$

Zur Bestimmung eines gemeinschaftlichen √Expts mehrerer √Größen sucht man die ~~mehr~~ kleinste Zahl in welcher alle Exp. enthalten sind.

z. B. $\sqrt{3} + \sqrt[3]{7} + \sqrt[4]{5} + \sqrt[12]{6} = \sqrt[12]{3^6} + \sqrt[12]{7^4} + \sqrt[12]{5^3} + \sqrt[12]{6}$;

u. s. w.

§ 67.

§67. Aufgaben.

Addition und Subtraction:

Nur gleichartige √Größen können addirt u. subtrahirt werden, daher ist zu suchen sie rational zu machen ung. ist die Add. u. Subtr. nur angedeutet werden.

$$3\sqrt{bc} - 8\sqrt[3]{a^2} + 5\sqrt[4]{cd^3} - 4\sqrt[3]{a^2} + 8\sqrt{bc} - 3\sqrt[4]{cd^3} - 6\sqrt[3]{a^2}$$
$$= 11\sqrt{bc} - 18\sqrt[3]{a^2} + 2\sqrt[4]{cd^3};$$

$$\sqrt{24} + \sqrt{54} - \sqrt{6} = \sqrt{4.6} + \sqrt{9.6} - \sqrt{6} = 2\sqrt{6} + 3\sqrt{6} - \sqrt{6} = 4\sqrt{6};$$

$$3\sqrt{448} - 2\sqrt{432} + 5\sqrt{847} + \sqrt{63} - 8\sqrt{175} + \sqrt{20667} =$$
$$3\sqrt{64.7} - 2\sqrt{432} + 5\sqrt{121.7} + \sqrt{9.7} - 8\sqrt{25.7} + \sqrt{20667} =$$
$$3.8\sqrt{7} - 2\sqrt{144.3} + 5.11\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 40\sqrt{7} + \sqrt{6889.3} =$$
$$24\sqrt{7} - 24\sqrt{3} + 55\sqrt{7} + 3\sqrt{7} - 40\sqrt{7} + 83\sqrt{3} =$$
$$= 48\sqrt{7} + 59\sqrt{3}.$$

Multiplication

$$3a\sqrt[n]{b^p} \times 5b\sqrt[n]{c^v} = 15ab\sqrt[n]{b^pc^v};$$
$$4c\sqrt[m]{a^p} \times 3a\sqrt[n]{b^r} = 4c\sqrt[mn]{a^{pn}} \times 3a\sqrt[mn]{b^{rm}} = 12ac\sqrt[mn]{a^{pn}b^{rm}};$$
$$2a\sqrt[4]{b^3} \times 5c\sqrt[6]{a^5} = 2a\sqrt[12]{b^9} \times 5c\sqrt[12]{a^{10}} = 10ac\sqrt[12]{a^{10}b^9};$$

$$\begin{array}{l} 2\sqrt{3} - 4\sqrt{5} + \sqrt{2} \\ 3\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{5} \\ \hline 6\sqrt[6]{3^5} - 12\sqrt[6]{5^3 3^2} + 3\sqrt[6]{3^2 2^3} \\ 4\sqrt[6]{3^3.5^2} - 8\sqrt[6]{5^5} + 2\sqrt[6]{2^3 5^2} \end{array} \Bigg\} = 6\sqrt[6]{243} - 12\sqrt[6]{1125} + 3\sqrt[6]{72} + 4\sqrt[6]{675} - 8\sqrt[6]{3125} + 2\sqrt[6]{200};$$

$$\begin{array}{r} 3\sqrt{5} + 2\sqrt{3} \\ 4\sqrt{5} - 6\sqrt{3} \\ \hline 12\sqrt{25} + 8\sqrt{15} \\ - 18\sqrt{15} - 12\sqrt{9} \\ \hline 24 - 10\sqrt{15}; \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a\sqrt{c} + b\sqrt{d} \\ e\sqrt{c} - f\sqrt{d} \\ \hline ace + eb\sqrt{dc} \\ - af\sqrt{cd} - bdf. \\ \hline ace - bdf + (be - af)\sqrt{cd}; \end{array}$$

Statt der weitläufigen Operation daß man die √ Gr
die man multipliciren soll erst unter einerlei √ Exp
bringt, so thut ich wohl, sie erst vor d. Operation
zu gebrochnen Exponenten zu verwandeln und dann
zu multipliciren. z. B.

$$\frac{3a}{2b}\sqrt{\frac{cx}{a}} - \frac{2b}{5c}\sqrt[3]{\frac{a}{cx^2}} + a\sqrt[4]{\frac{c}{x^3}} \times \frac{2a}{b}\sqrt{\frac{cx}{a}} + 3b\sqrt[4]{\frac{cx}{b}} =$$

$$= \left.\begin{array}{l} \frac{3}{2} a b^{-1} c^{\frac12} x^{\frac12} a^{-\frac12} - \frac{2}{5} a^{+\frac13} b c^{-1} c^{-\frac13} x^{-\frac23} + a c^{\frac14} x^{-\frac34} \\ 2ab^{-1} a^{-\frac12} c^{\frac12} x^{\frac12} + 3b b^{-\frac14} c^{\frac14} x^{\frac14}. \end{array}\right\} =$$

$$= \begin{array}{l} \frac{3}{2} a^{\frac12} b^{-1} c^{\frac12} x^{\frac12} - \frac{2}{5} a^{\frac13} b c^{-\frac43} x^{-\frac23} + a c^{\frac14} x^{-\frac34} \\ 2a^{\frac12} b^{-1} c^{\frac12} x^{\frac12} + 3b^{\frac34} c^{\frac14} x^{\frac14}. \end{array}$$

$$3ab^{-2}cx - \frac{4}{5} a^{\frac56} c^{-\frac56} x^{-\frac16} + 2a^{\frac32} b^{-1} c^{\frac34} x^{-\frac14}$$

$$+ \frac{9}{2} a^{\frac12} b^{-\frac14} c^{\frac34} x^{\frac34} - \frac{6}{5} a^{\frac13} b^{\frac74} c^{-\frac{13}{12}} x^{-\frac{5}{12}} + 3ab^{\frac34} c^{\frac12} x^{-\frac12} =$$

$$= \frac{3acx}{b^2} - \frac{4}{5}\sqrt[6]{\frac{a^5\cancel{x}}{c^5 x}} + \frac{2a}{b}\sqrt[4]{\frac{a^2c^3}{x}} + \frac{9}{2}\sqrt[4]{\frac{a^2c^3x^3}{b}}$$

$$- \frac{6b}{5c}\sqrt[12]{\frac{a^4b^9}{cx^5}} + 3a\sqrt[4]{\frac{b^3c^2}{x^2}};$$

Kommen wir hier beim Wiederherstellen der √ form
unächte Brüche in den Exponenten vor, so werden
die ganzen Zahlen als Exponent d. i. Größe gilt
vor das √ Zeichen geschrieben wie hier beim 3ten Glied
bei $a^{\frac{3}{2}}$ der ächte Bruch unter d. √ Zeichen;

Division.

Auch hier wird man mit noch größerem Vortheile die √ Zeichen durch gebrochene Exponenten erst wegschaffen, und dieses ersehen wir Parag. 169. — der Dividendus sey:

$$\frac{6}{25x}\sqrt[6]{\frac{b^3y}{x^3z^3}}-\frac{9}{20}a\sqrt[6]{\frac{y}{x^2z^3}}-\frac{5}{4}a\sqrt[6]{\frac{x^4z^3}{y^3}}+1-\frac{4b}{25x^2\sqrt[3]{y}}+$$

$$+\frac{cd^2}{4a}\sqrt[6]{\frac{x^2}{y}}+\frac{2cd^2}{15a^2}\sqrt[6]{\frac{b^3}{x^5y}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{bz}{xy}}-\frac{cd^2}{5a^2}\sqrt[6]{\frac{y^2}{x^2z^3}}+\frac{9}{16}a^2\sqrt[3]{\frac{x}{y}};$$

der Divisor $=\frac{3}{4}a\sqrt[6]{\frac{x}{y}}-\frac{3}{5}\sqrt[6]{\frac{y^2}{x^3z^3}}+\frac{2}{5x}\sqrt[6]{\frac{b^3}{y}}=$

$$\frac{3}{4}a\,x^{\frac{1}{6}}y^{-\frac{1}{6}}-\frac{3}{5}y^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}z^{-\frac{1}{2}}+\frac{2}{5}b^{\frac{1}{2}}x^{-1}y^{-\frac{1}{6}};$$

ist der Dividendus $=\frac{6}{25}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{3}{2}}y^{+\frac{1}{6}}z^{-\frac{1}{2}}-\frac{9}{20}ax^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{6}}z^{-\frac{1}{2}}-\frac{5}{4}ax^{\frac{2}{3}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}+1-$

$$-\frac{4}{25}bx^{-2}y^{-\frac{1}{3}}+\frac{1}{4}a^{-1}cd^2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{6}}+\frac{2}{15}a^{-2}b^{\frac{1}{2}}cd^2x^{-\frac{5}{6}}y^{-\frac{1}{6}}-\frac{2}{3}b^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}y^{-\frac{1}{2}}z^{\frac{1}{2}}-$$

$$-\frac{1}{5}a^{-2}cd^2x^{-\frac{1}{3}}y^{\frac{1}{3}}z^{-\frac{1}{2}}+\frac{9}{16}a^2x^{\frac{1}{3}}y^{-\frac{1}{3}};$$

den Divisor und Dividend nach fallenden Potenzen von x geordnet:

$\frac{1}{6}\ -\frac{1}{2}\ -1$ im Divisor d. Exponent von x. also geordnet

im Dividendus die Exp. von x.

$x\ -\frac{3}{2}\ -\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+0-2+\frac{1}{3}-\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}$. auf Nenner 6 gebracht

$-\frac{9}{6}-\frac{2}{6}+\frac{4}{6}+0-\frac{12}{6}+\frac{2}{6}-\frac{5}{6}-\frac{3}{6}-\frac{2}{6}+\frac{2}{6}$; geordnet.

$+\frac{4}{6}+\frac{2}{6}+\frac{2}{6}+0-\frac{2}{6}-\frac{2}{6}-\frac{3}{6}-\frac{5}{6}-\frac{9}{6}-\frac{12}{6}$; und

Divisor

$$-\tfrac{3}{4}ax^{\frac16}y^{-\frac16} - \tfrac{3}{5}x^{-\frac12}y^{\frac13}z^{-\frac12} + \tfrac{2}{5}b^{\frac12}x^{-1}y^{-\frac16} \;\Big|\; -\tfrac{5}{3}x^{\frac12}y^{-\frac13}z^{\frac12} + \tfrac{3}{4}ax^{\frac16}y^{-\frac16} + \tfrac{1}{3}a^{-2}cd^2x^{\frac16} - \tfrac{6}{15}b^{\frac12}x^{-1}y^{-\frac16};$$

Dividend $= -\tfrac{5}{4}ax^{\frac23}y^{-\frac12}z^{\frac12} + \tfrac{9}{16}a^2x^{\frac13}y^{-\frac13} + \tfrac{1}{4}a^{-1}cd^2x^{\frac13}y^{-\frac16} + 1 - \tfrac{9}{20}ax^{-\frac13}y^{\frac16}z^{-\frac12} - \tfrac{1}{5}a^{-2}cd^2x^{-\frac13}y^{\frac13}z^{-\frac12} - \tfrac{2}{3}b^{\frac12}x^{-\frac12}y^{-\frac12}z^{\frac12} + \tfrac{2}{15}a^{-2}b^{\frac12}cd^2x^{-\frac56}y^{-\frac16}$

$+ \tfrac{6}{25}b^{\frac12}x^{-\frac32}y^{\frac16}z^{-\frac12} - \tfrac{4}{25}bx^{-2}y^{-\frac13};$

$\mp\tfrac{5}{4}ax^{\frac23}y^{-\frac12}z^{\frac12} \pm 1 \pm \tfrac{2}{3}b^{\frac12}x^{-\frac12}y^{-\frac12}z^{\frac12}$

$\tfrac{9}{16}a^2x^{\frac13}y^{-\frac13} + \ldots$

$\pm\tfrac{9}{16}a^2x^{\frac13}y^{-\frac13} \mp \tfrac{9}{20}ax^{-\frac13}y^{\frac16}z^{-\frac12} \pm \tfrac{6}{20}ab^{\frac12}x^{-\frac56}y^{-\frac13}$

$\tfrac{1}{4}a^{-1}cd^2x^{\frac13}y^{-\frac16} \ldots$

$\pm\tfrac{1}{4}a^{-1}cd^2x^{\frac13}y^{-\frac16} \mp \tfrac{1}{5}a^{-2}cd^2x^{-\frac13}y^{\frac13}z^{-\frac12} \pm \tfrac{2}{15}a^{-2}b^{\frac12}cd^2x^{-\frac56}y^{-\frac16}$

$-\tfrac{3}{10}ab^{\frac12}x^{-\frac56}y^{-\frac13}$

$\mp\tfrac{3}{10}ab^{\frac12}x^{-\frac56}y^{-\frac13} \pm \tfrac{6}{25}b^{\frac12}x^{-\frac32}y^{\frac16}z^{-\frac12} \mp \tfrac{4}{25}bx^{-2}y^{-\frac13}.$

0 0 0

der ganze Dividend u. Divis. geordnet nach [illegible]

Dem Quotient die √ Zeichen gegeben $= \underline{\tfrac{3}{4}a\sqrt[6]{\tfrac{x}{y}} + \tfrac{cd^2}{3a^2}\sqrt[6]{x} - \tfrac{6}{15x}\sqrt[6]{\tfrac{b^3}{y}} - \tfrac{5}{3}\sqrt[6]{\tfrac{x^3z^3}{y^3}}};$

Hier habe ich das Verbindungszeichen, wo ein Product eines Factors des Divisor und eines Factors des Quot. vom Dividenden muss abgezogen werden, ist wird also mit entgegengesetzten Zeichen dem Dividenden angeschlossen und später gehoben. Eben so hebt sich das +1 [illegible] auf, indem zwei entgegengesetzte Factoren = +1 geben.

Sind die Größen unter den Wurzelzeichen Zahlen, so wird es oft schwierig oder unmöglich sein die Division auf die gewöhnliche Art zu verrichten, da bei der Multiplication gewisse Theile verschwinden.

z. B. $\dfrac{41\sqrt{6}-71\sqrt{3}.}{5\sqrt{3}-7\sqrt{6}}$

Man muß zuförderst den Divisor rational zu machen suchen, und wo die Größe zweitheilig ist, kann ~~man~~ dieser Ausdruck als Product aus der Summe und Differenz in die Differenz d. Quadrate leicht umgewandelt werden, und man muß dann nur den Dividend mit demselben Factor multipliciren.

$$\frac{(41\sqrt{6}-71\sqrt{3})(5\sqrt{3}+7\sqrt{6})}{(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})(5\sqrt{3}+7\sqrt{6})} = \frac{615\sqrt{2}-1065+1722-1491\sqrt{2}}{-219}$$

$$= \frac{657-876\sqrt{2}}{-219} = \frac{4\sqrt{2} \cancel{-3}}{\cancel{1}} = \underline{4\sqrt{2}-3};$$

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

$$\frac{(41\sqrt{6}-71\sqrt{3}).(5\sqrt{3}+7\sqrt{6})}{(5\sqrt{3}-7\sqrt{6})(5\sqrt{3}+7\sqrt{6})} =$$

$$= \frac{205\sqrt{18}-355\sqrt{9}+284\sqrt{36}-497\sqrt{18}}{(5\sqrt{3})^2-(7\sqrt{6})^2}$$

$$= \frac{-292.\sqrt{18}-355.3+284.6}{25.3.-49.6}$$

$$= \frac{-292.\sqrt{2}-355+284.2}{25-49.2} \quad 355$$

$$= \frac{-292\sqrt{2}+213}{-73} = \frac{-4\sqrt{2}+3}{-1}$$

$$= \underline{4\sqrt{2}-3}$$

Ist der Divisor eine 3namige Größe, so ist die Operation schwieriger und muß zweimal wiederholt werden. z. B.

$$\frac{30+4\sqrt{5}+150\sqrt{2}-34\sqrt{6}+10\sqrt{10}-40\sqrt{12}-6\sqrt{60}}{2\sqrt{5}+3\sqrt{2}-8\sqrt{6}.}$$

Um den Divisor rational zu machen multiplicirt man ihn mit sich selbst, lassen aber 2 Zeichen undann eins muß man immer ungeändert laſsen.

$$\begin{array}{l} 2\sqrt5+3\sqrt2-8\sqrt6 \\ 2\sqrt5-3\sqrt2+8\sqrt6 \\ \hline 4\sqrt{25}+6\sqrt{10}-16\sqrt{30} = 20+\cancel{6\sqrt{10}}-\cancel{16\sqrt{30}} \\ \cancel{+6\sqrt{10}}-9\sqrt4+24\sqrt{12} = \cancel{-6\sqrt{10}}-18+48\sqrt3 \\ +16\sqrt{30}+24\sqrt{12}-64\sqrt{36}. = \cancel{16\sqrt{30}}+48\sqrt3-384 \\ \hline 96\sqrt3-382. \qquad\qquad 96\sqrt3-382 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4+3-2 \\ 4-3+2 \\ \hline 16+12-8 \\ \quad -12-9+6 \\ \qquad +8+6-4 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 5 \\ 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a+b-c \\ a-b+c \\ \hline a^2+ab-ac \\ \quad -ab-b^2+bc \\ \qquad +ac+bc-c^2 \\ \hline a^2-b^2+2bc-c^2 \end{array}$$

Mit dieſem jetzt erhaltenen ähnlichen Divisor verfahre man nun wie vorhin.

$$\frac{(30+4\sqrt5+150\sqrt2-34\sqrt6+10\sqrt{10}-80\sqrt3-12\sqrt{15})(2\sqrt5-3\sqrt2+8\sqrt6)}{96\sqrt3-382.}$$

$$=\frac{(30+4\sqrt5\ldots\ldots\ldots12\sqrt{15})(2\sqrt5-3\sqrt2+8\sqrt6)(96\sqrt3+382)}{(96\sqrt3-382)(96\sqrt3+382)}$$

$$=\frac{(2484\sqrt3-2492-1910\sqrt2+480\sqrt6)(96\sqrt3+382)}{-118276}$$

$$=\frac{709656\sqrt3-236552-591380\sqrt2}{-118276.}$$

$$=\frac{6\sqrt3-2-5\sqrt2}{-1}=\underline{\underline{2+5\sqrt2-6\sqrt3}}$$

Imaginaere Größen

§ 70. 77.

Jede gerade Potenz einer Größe +a oder −a ist eine positive; jede ungerade Potenz hingegen + od. − je nachdem die Größe aus der sie entstanden + od. − war

$$\begin{array}{ll} +a. & -a \\ +a & -a \\ \hline +a^2 & +a^2 \\ +a & -a \\ \hline +a^3 & -a^3 \\ +a & -a \\ \hline +a^4 & +a^4 \end{array}$$

Daher kann man für eine Größe a welche die $\sqrt[m]{A}$ ist unbedingt ±a setzen; welches von beiden Zeichen übrigens zu nehmen sey, das hängt von Umständen ab und die Umständlichkeit muß hierin entscheiden.

Ein Ausdruck wie $\sqrt[m]{-A}$ ist eine unmögliche (imaginäre, eingebildete) Größe.

Das Unmögliche kann man in absolutes und bedingtes Unmögliche eintheilen. Das erstere ist ein Gegenstand der Philosophie. Die bedingte Unmöglichkeit liegt aber darin: Eine negative Größe an sich ist etwas mögliches. Das √ ausziehen ist auch etwas mögliches an sich, aber nur dann wenn ~~beide~~ zusammengesetzt wird es unmöglich. (~~Un~~bedingt

(unrecht)

unmöglich sind sie auch nur dem Grunde nach, weil wenn ~~sie~~ 2 solche Größen mit einander mult. multiplicirt werden das Produkt würde möglich werden. Man ist also hierbei nicht über das Wort zu zweifeln und über die Sache hierbei nachsinnen.

In d. Regel reducirt man alle unmöglichen Größen auf den Ausdruck √-1, und dies ist in der Anwendung auch von großer Wichtigkeit:

$$\sqrt[2n]{-A} = \sqrt[n]{\sqrt[2]{-A}} = \left((-A)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{n}} = -A^{\frac{1}{2n}} = \sqrt[2n]{-A}$$

auf √-1 reducirt:

$$\sqrt[2n]{-A} = \sqrt[2n]{A\cdot -1} = \sqrt[2n]{A}\cdot\sqrt[2n]{-1};$$

$$\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81\cdot -1} = \sqrt[4]{81}\cdot\sqrt[4]{-1} = 3\sqrt[4]{-1};$$

In der Anwendung kommen in d. Regel nicht höhern Wurzeln vor als Quadrat Wurzeln.

$$\sqrt{-49} = 7\sqrt{-1}; \quad b\sqrt{-c} = b\sqrt{c}\cdot\sqrt{-1};$$

§71. Addition u. Subtraction unmöglicher Größen ist ganz so wie die der gewöhnlichen √ Größen.

$$7\sqrt{-4}+8\sqrt{-25}-6\sqrt{-9} = 14\sqrt{-1}+40\sqrt{-1}-18\sqrt{-1} = \underline{36\sqrt{-}}$$

Multiplication unmöglicher Größen

dieß ist schwieriger, und bei ihr tritt die Frage, füglich auf Andeutung der einzelnen Zahlen ein und entsteht wenn $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ ×irt wird.

Für jede Größe kann ich sie annähernd darstellen z. B. $\sqrt{3} = 1,7320508$, beide sind Zahlformen nur daß bei der in Ziffern ausgedrückten √ eine Annäherung gestattet wird.

Nun entsteht die Frage wie soll ich nun jede Größe in 2 = Factoren zerlegen. Das geschieht dadurch z. B. $3 = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$.

Auf gleiche Weise angewandt -1 in 2 = Factoren zerlegt wird es sein $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ ~~und~~ -1.

Soll nun eine mögliche Größe × einer unmöglichen × zu machen, so bleibt das Product unmöglich und die Zeichen richten sich nach den Zeichen der Factoren: z. B.

$$+b\sqrt{-a} \times +\sqrt{c} = b\sqrt{-ac} = b\sqrt{ac} \cdot \sqrt{-1};$$

Unmögliche Größen × unmöglichen × zu, so ~~mult~~iplizirt man d. Größen unter dem √ Zeichen wie gewöhnlich, verwandelt aber dafür die Vorzeichen welches eigentlich vermöge der Vorzeichen der Factoren statt finden sollte und entgegengesetzt ist.

$$a\sqrt{-b}\,.\,c\sqrt{-d} = a\sqrt{b}.\sqrt{-1}\,.\,c\sqrt{d}.\sqrt{-1} =$$

$$= ac\sqrt{b}.\sqrt{d}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = ac\sqrt{bd}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1} =$$

$$= ac\sqrt{bd}\times -1 = \underline{-ac\sqrt{bd}}.$$

$$a\sqrt{-b}\,.\,-c\sqrt{-d} = a\sqrt{b}.\sqrt{-1}\times -c\sqrt{d}.\sqrt{-1} =$$

$$= -ac\sqrt{bd}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -ac\sqrt{bd}\,.\,-1 =$$

$$= \underline{+ac\sqrt{bd}}.$$

$5\sqrt{-3}\,.\,-4\sqrt{-2} = 20\sqrt{6}.$ denn es ist

$$5\sqrt{-3}\,.\,-4\sqrt{-2} = 5\sqrt{3}.\sqrt{-1}\times -4\sqrt{2}.\sqrt{-1} =$$

$$= -20\sqrt{6}.\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -20\sqrt{6}\times -1 = \underline{20\sqrt{6}}.$$

Gemischte Multiplication:

$$\begin{array}{l}
2\sqrt{3} - 4\sqrt{-2} - 5\sqrt{-3} \\
3\sqrt{3} + 2\sqrt{-2} - 3\sqrt{-5} \\
\hline
\cancel{18} - \cancel{12\sqrt{-6}} - 45\sqrt{-1} \\
\cancel{4\sqrt{-6}} + \cancel{16} + 10\sqrt{6} \\
-6\sqrt{-15} - 12\sqrt{10} - 15\sqrt{15}. \\
\hline
= 34 - 8\sqrt{-6} - 45\sqrt{-1} + 10\sqrt{6} - 6\sqrt{-15} - 12\sqrt{10} - 15\sqrt{15}
\end{array}$$

Diviſ

Division unmöglicher Größen.

Wenn man hier wie bei der andern Division von der Multiplikation rückwärts schließen wollte, so würde man unrecht thun, indem man auf diesem gewöhnlichen Wege nicht fort kommt; denn auch hier werden gewisse Schwierigkeiten eintreten, denn da bei der Multiplikation 2er unmöglichen Größen die Zeichen änderten, so wird sich d. Division desto größere Aufmerksamkeit anwenden müssen.

Die einzige und größte Schwierigkeit ist doch wo eine ~~M~~unmögliche Größe durch eine unmögliche dividirt werden soll.

Ein Erleichterungsmittel dessen ich mich hier bedienen kann ist das, daß man die Größen immer mit $\sqrt{-1}$ reduzirt.

$$\frac{\sqrt{-ab}}{\sqrt{-a}} = \frac{+\sqrt{ab}\cdot\sqrt{-1}}{+\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}} = \frac{+\sqrt{ab}}{+\sqrt{a}} = +\sqrt{\frac{ab}{a}} = +\sqrt{b};$$

$$\frac{\sqrt{-ab}}{-\sqrt{-a}} = \frac{+\sqrt{ab}\cdot\sqrt{-1}}{-\sqrt{a}\cdot\sqrt{-1}} = \frac{+\sqrt{ab}}{-\sqrt{a}} = -\sqrt{\frac{ab}{a}} = -\sqrt{b};$$

oder:

$$\frac{+\sqrt{-ab}}{\pm\sqrt{-a}} = \pm\sqrt{b}; \quad \text{und:} \quad \frac{-\sqrt{-ab}}{\pm\sqrt{-a}} = \mp\sqrt{b};$$

Ein Hauptumstand ist den Divisor oder Nenner rational zu machen. Werden unmögliche Gr. durch unmögliche dividirt, so läßt sich $\sqrt{-1}$ wegschaffen und wir Zähler und Nenner haben. Wird eine mögliche Gr. durch eine unmögl. dividirt, so schafft man im Nenner $\sqrt{-1}$ weg, multiplizirt beide Theile mit $\sqrt{-1}$, so wird im Nenner -1. ~~welches~~ das Zeichen des Bruches ins entgegengesetzte verwandelt —

Ist das Unmögliche aus dem Nenner weggeschafft, so muß besonders bei Zahlenbeispielen der Nenner noch rational gemacht werden, man multiplizirt ihn durch sich selbst mit Wurzelzeichen, die Zeichen aufheben einander, wie oben.

d. h. also unmögliche Größen durch unmögliche dividirt, bestimmt sowohl die Vorzeichen als auch die Zeichen unter dem √ zeichen nach gewöhnlichen Regeln.

Mögliche durch unmögliche Größe zu dividiren, das ist schwieriger und hat besonders hierauf zu achten:

$$\text{I. } \frac{+\sqrt{ab}}{+\sqrt{-a}} = \frac{+\sqrt{ab}}{+\sqrt{a}.\sqrt{-1}} = \frac{+\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{+\sqrt{a}.-1} = \frac{+\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{-\sqrt{a}} =$$

$$= -\sqrt{-1}\sqrt{\frac{ab}{a}} = -\sqrt{-1}.\sqrt{b} = \underline{-\sqrt{-b}};$$

$$\text{II. } \frac{+\sqrt{ab}}{-\sqrt{-a}} = \frac{+\sqrt{ab}}{-\sqrt{a}.\sqrt{-1}} = \frac{+\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{-\sqrt{a}.-1} = \frac{+\sqrt{ab}.\sqrt{-1}}{+\sqrt{a}}$$

$$= +\sqrt{-1}\sqrt{\frac{ab}{a}} = +\sqrt{-1}\sqrt{b} = \underline{+\sqrt{-b}};$$

diese Fälle combinirt:

$$\underline{\frac{+\sqrt{ab}}{\pm\sqrt{-a}} = \mp\sqrt{-b}}; \text{ und } \underline{\frac{-\sqrt{ab}}{\pm\sqrt{-a}} = \pm\sqrt{-b}};$$

Eine Regel würde also seyn:

Wenn eine mögliche durch unmögliche Größe dividirt werden soll, so dividirt man die Größen unter dem √ zeichen nach gewöhnlichen Regeln, gebe dem Quotient aber ein den gewöhnlichen Regeln entgegengesetztes Vorzeichen.

Wunderbar ist es daß viele anerkannt große Mathematiker hierin ungeheure Fehler begangen haben; so z. B. namentl. Langsdorfs Analysis voller Fehler bei den unmöglichen Größen.

Zahlen-Beyspiele.

$$\frac{-\sqrt{15}}{+\sqrt{-3}} = +\sqrt{-5}\;;\quad \frac{+\sqrt{32}}{+\sqrt{-8}} = -\sqrt{-4} = -2\sqrt{-1}\;;$$

$$\frac{2\sqrt{8}-\sqrt{-10}}{-\sqrt{-2}} = \frac{2\sqrt{8}}{-\sqrt{-2}} + \frac{-\sqrt{-10}}{-\sqrt{-2}} = +2\sqrt{-4} + +\sqrt{5}, =$$

$= \underline{4\sqrt{-1}+\sqrt{5}}$; = dem Quotient. wollte man die Probe machen so steht.

$$\begin{array}{l} 4\sqrt{-1}+\sqrt{5} \\ -\sqrt{-2} \\ \hline +4\sqrt{2}\;-\sqrt{-10} = \underline{2\sqrt{8}-\sqrt{-10}}; \end{array}$$

Bei einem Beyspiele wie unter $\frac{14}{4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5}}$ suchte man den Nenner rational zu machen, indem man sonst nichts anfangen kann.

$$\frac{14}{4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5}} = \frac{14(4\sqrt{-3}+2\sqrt{-5})}{(4\sqrt{-3}-2\sqrt{-5})\cdot(4\sqrt{-3}+2\sqrt{-5})} = \text{differenz d. Quadrate}$$

$$= \frac{14(4\sqrt{-3}+2\sqrt{-5})}{-48+20} = \frac{14(4\sqrt{-3}+2\sqrt{-5})}{-28} = \frac{4\sqrt{-3}+2\sqrt{-5}}{-2}$$

$$= \underline{-2\sqrt{-3}-\sqrt{-5}};$$

Seite 150 § 72.

Alle graden Potenzen unmöglicher √ wie √−a sind mögliche Größen, alle ungraden dagegen unmögliche Größen.

$$\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{-a})^{2n} = ((\sqrt{-a})^2)^n = (-a)^n = \text{einer } \underline{\text{möglichen Gr}}\\ (\sqrt{-a})^{2n+1} = (\sqrt{-a})^{2n}\cdot(\sqrt{-a})^1 = (-a)^n\cdot\sqrt{-a} = \underline{\text{unmöglich}}\end{array}\right.$$

$$(\sqrt{-5})^6 = (\sqrt{-5})^{2\cdot 3} = (-5)^3 = -125;$$

$$(\sqrt{-5})^8 = (\sqrt{-5})^{2\cdot 4} = (-5)^4 = +625;$$

§ 73. Wenn ein Bruch $\frac{a}{b}$ der sich nicht zu einer ganzen Zahl bringen läßt, zu einer Potenz erhoben wird, so ist sie allemal ein Bruch derselben Art.

Der Verfasser spricht hier nur von einem unächten Bruch weil von den ächten schon früher es bewiesen worden ist. also für $a > b$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \overbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdots\frac{a}{b}}^{n\text{mal.}} = \frac{a^n}{b^n}$$

. da hier Zähler durch den Produkt von a.aa.. u. d. Nenner d. Produkt von b.bb.. hinzufügt, so erhellt daß, da in den Factoren einzeln keine gemeinsch. Theiler finden, sie auch in diesen Producten keine Theiler haben können.

Allgemeiner könnte man den Beweis auch so
führen: da,

$\frac{a}{b}$) ist $a > b$ und man denke sich dasselbe a zerlegt,
ergibt sich: $nb+c = a$. so ist: $b>c$ und: unter der Bedingung daß $\frac{a}{b} = n+\frac{c}{b}$
ist $a = bn+c$ und $b>c$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\frac{nb+c}{b}\right)^2 = \left(n+\frac{c}{b}\right)^2 = n^2 + \frac{2nc}{b} + \frac{c^2}{b^2};$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \left(n+\frac{c}{b}\right)^3 = n^3 + \frac{3n^2c}{b} + \frac{3nc^2}{b^2} + \frac{c^3}{b^3} \text{ u.s.w.}$$

In diesen Fällen wäre es nun möglich daß die Zähler
Zähler in diesen erhabenen Potenzen durch b
theilbar wären, indessen da sie immer noch zum
letzten Glied eine Potenz eines echten Bruchs
$\frac{c^2}{b^2}$ $\frac{c^3}{b^3}$ .... haben so ist das Ganze also nicht
theilbar.

Auch wenn die Quadratwurzelziehung nicht gemacht ist
daß $\frac{a}{b}$ ist die kleinsten Benennung reducirt sey
so ist der Satz gültig, denn alsdann läßt er sich
reduciren. z.B.

$$\left(\frac{na}{nb}\right)^m = \frac{\overbrace{na \cdot na \cdots na}^{m \text{ mal}}}{nb \cdot nb \cdots nb} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$ weil n überall

vorkommt und $\frac{a}{b}$ als Bruch nur allein übrig bleibt
wenn n weggeschafft ist.

Das ganze will nur den Kleinen doch darthun daß aus einer unvollständigen Potenz, irrationale Größen entstehen. Der nehmliche Fehler auch bei der Division, wenn man dieses auf Art der Decimalbruch gerechnet z. B. $\frac{1}{3} = 0,333....$

Wenn man auch einer Größe A die n^{te} $\sqrt{\ }$ ziehen soll $\sqrt[n]{A}$ so können 3 Fälle statt finden. die $\sqrt{\ }$ a kann nämlich so beschaffen seyn daß

$a^n = A$; $a^n > A$; und $(a-1)^n < A$ ist;

z. B. $\sqrt{10} > 3$, und $\sqrt{10} < 4$.

es kann der Fall seyn daß $\sqrt[3]{A} > a$ und $\sqrt[3]{A} < (a+1)$ ist so ist die $\sqrt[3]{A} = a +$ einem ächten Bruch; und daher ist es klar daß nur bei Größen u. Zahlen wenn sie schon vollständige dignitäten sind die $\sqrt{\ }$ ausgezogen werden kann, und daß $a +$ Bruch, nie die vollständige Größe A geben kann, wenn es auch im ersten Augenblick so scheint.

$\sqrt[4]{112} = 3 + \frac{a}{a+b}$ dieser Bruch müßte nun die Eigenschaft haben erhoben in die 3te Potenz ergeben die Zahl 112 wieder hervorzubringen. dies ist ab. und vorhergesehen unmöglich, und daraus kann man schließen daß von einer unvollständigen dignität keine reine Wurzel gezogen werden kann.

174. Erklärungen. Irrationale und Rationale Größen

ſten.

Eine Irrationalzahl ist diejenige, welche ſich weder durch die Einheit unmittelbar noch durch Theile der Einheit beſtimmen läßt. Findet aber eine ſolche Beziehung zur Einheit ſtatt wenn auch nicht nach jeder Art der Theilung und Beſtimmung, ſo heißt die Zahl rational.

z.B. z.B. $ab = \frac{1}{6} ad$ iſt rational.

8 $xy = \frac{1}{3} xy$ iſt eine rationale Zahl. will ich aber den $\frac{1}{3} xy$ in 10, 100tel xy theilen ſo iſt das vollſtändig unmöglich denn es iſt $\frac{1}{3} xy = 0,3333\ldots xy$;

Ebenſo iſt $\sqrt[4]{112} = 3 + \frac{a}{a+b}$ eine irrationale Zahl weil der ächte Bruch im Reſultat iſt die Zahl 112 nie wieder hervorzubringen.

Das Wort rational und irrational bezieht ſich alſo nur auf das Einheit Verhältniß, ob es ſich genau oder nicht genau darſtellen läßt.

Ein algebraiſcher Ausdruck kann irrational ſein, für die Anwendung aber rational gemacht werden. z.B. $\sqrt[4]{a}$ iſt irrational; bei $a = 81$ ſo iſt $\sqrt[4]{81} = 3 =$ rational; Allen Buchſtaben Aus-

Dieſes iſt nicht zu überſehen $3 + \frac{a}{a+b}$ iſt zwar eine rationale Zahl an ſich, allein in Bezug als $\sqrt[4]{}$ von 112 betrachtet iſt ſie irrational denn $\left(3 + \frac{a}{a+b}\right)^4$ giebt nicht 112 und es läßt ſich $\sqrt[4]{112}$ gar nicht genau angeben

Ausdrücke sind daher irrational zu nennen. Gelange sie noch ein √ Zeichen zu stehen

$\sqrt[2]{a^{m}}$ = irrat. $\sqrt[2]{a^{2n}} = a^{n}$ = rational.

Wenn in der Anwendung aus einer irrationalen Zahl die √ ausziehen sollen, so thun wir das immer in Decimalstellen, weil das am bequemsten ist; nun fragt es sich aber ob nicht ein anderer Bruch als Decimalbruch ist die √ vielleicht vollständig b. drücke? Nein! [illegible] [illegible].

Oft ist es ab. bequemer gewöhnliche Brüche zu machen, z.

z. B. $\sqrt{3} = 1{,}7320508 = \frac{17320508}{10000000}$

```
10000000
17320508 | 1
10000000
 7320508 | 1
10000000
 7320508
 2679492 | 2
 7320508
 5358984
 1961524 | 1
 2679492
 1961524
  717968 | 2
 1961524
 1435936
  525588 | 1
  717968
  525588
  192380 | 2
  525588
  384760
  140828 | 1
  192380
  140828
```

Quot.	Zähler	Nenner
	1.	0.
1	1	1
1	2	1
2	5	3
1	7	4
2	19	11
1	26	15
2	71	41
1	97	56

$\sqrt{3} > 1$
< 2
$> \frac{5}{3}$
$< \frac{7}{4}$
$> \frac{19}{11}$
$< \frac{26}{15}$
$> \frac{71}{41}$
$< \frac{97}{56}$

aus diesen Brüchen kann ich mir nun den schicklichsten wählen z. B. $\frac{7}{4} = 1{,}75$;

375. Lehrſatz.

Jede gerade Potenz einer Irrationalgröße $\sqrt{a}$ iſt rational, jede ungerade irrational:

$$(\sqrt{a})^{2n} = ((\sqrt{a})^{2})^{n} = a^{n} = \text{rational};$$

$$(\sqrt{a})^{2n+1} = (\sqrt{a})^{2n} \cdot (\sqrt{a})^{1} = a^{n} \cdot \sqrt{a} = \text{irrational};$$

Bedingungen können hier ſtatt finden, wo z. B. $\sqrt[3]{a}$ durch eine ungerade $\sqrt{\ }$Erhebung rational wird: $(\sqrt[3]{a})^{3n} = a^{n}$; überhaupt alſo wird jeder irrationale Ausdruck rational durch eine Potenzierung wenn d. Exp. des $\sqrt{\ }$zeichen in dem Exp. d. Dignität, ganz od. als Faktor enthalten iſt.

VII Abschnitt.

Der Binomische Lehrsatz.

Seite 154.

Der Vf. stellt hier das sogenannte praktische auf, das Theoretische des Lehrsatzes oder der Beweis kommt erst im folgenden Abschnitt.
Zum weiteren Fortkommen in der Analysis ist der Lehrsatz wichtig.
Binom heißt eine 2theilige Größe, und in der Anwendung kommen außer 2theiligen Größen selten 3 oder mehrtheilige vor. Was übrigens von 2theilig. Größen gilt läßt sich auch sehr leicht auf Trinome anwenden.
Wenn man (a+b) nach und nach auf Potenzen erhebt, so ist.

$(a+b)^1 = a+b;$
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2;$
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3;$
$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$
$(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5;$
$(a+b)^6 = a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6;$
$\frac{6}{1}\quad \frac{6.5}{1.2}\quad \frac{6.5.4}{1.2.3}\quad \frac{6.5.4.3}{1.2.3.4}\quad \frac{6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5}$

$\frac{6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6}$

Wenn man diese gewonnenen Potenzen betrachtet, so wird man bald finden daß nicht allein in ihren literalischen Producten sondern auch in ihren Coefficienten eine gewisse Ordnung und Gesetz der Fortschreitung Statt finden.

Die literalischen Producte betreffend:

1. Sie sind sämmtlich Combinationen von den beiden Wurzeln a u. b, denn weil nur a und b in einem Potenz stehen im 1ten u. letzten Glied allein vorkommend so kann man die fehlende Wurzel zu d. 0ten Potz = 1 als erhoben denken.

2. Jede Potenz fängt mit dem höchsten Theil der Wurzel zu derselben Potenz erhoben an, und die Reihen nehmen [illegible] und nimmt mit der Potenz immer um 1 fallend: a^0; entgegengesetzt fängt vom zweiten Glied die 2te Wurzel b^0 an u. nimmt mit b zu der höchsten Potenz wie im Th. d. Reihe ungleich ebenfalls um 1 steigend.

Aus 2 folgt nun daß die die beiden Wurzeln mit stets um 1 fallenden u. steigenden Exponenten vorkommen und daß:

3tens. daß die Exponenten eines jeden Gliedes die

Binoms ihrer Summe nach den Exponenten = folgen müssten, auch wenn das Binom erhoben werden soll. Ebenso folgt:

4tens daß die Exponenten der Glieder, die von beiden Enden = weit nach der Mitte zu stehen, von a u. b, entgegengesetzt einander gleich seyn müssen.

5/ da nun a gewiß als b von der höchsten Potenz d. Binoms um 1 fallend bis 0 und [illegible] zu nimmt) nothwendig die Anzahl d. Glieder um 1 größer sein, als der Exponent d. Binoms Einheiten hat.

Die Coefficienten.

Ihrer Fortschreitung Entdeckung verdanken wir eigentlich dem Zufall; wenigstens glaubt man daß Newton sie entdeckt haben soll, obschon man auch an der Binomischen Entwickelung des Newtonschen Lehrsatzes [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] der zuerst einen fruchtbaren Gebrauch von ihr machte.

Wenn man die Coefficienten betrachtet, so bemerkt man leicht aus ihnen verschiedene Gesetze ihrer Fortschreitung entwickeln. z. B. [illegible] daß man die Coefficienten die [illegible] [illegible] unmittelbar aus der vorhergehenden entwickelt werden. durch Addieren des 2ten zum 3ten Glied und den Zusammenzählen, des 2ten + 1ten u. 3 + 2ten Glied der vorhergehenden Potenz erhält. z.B.

1te Potenz Coefficient. 1. + 1.
2te Pot. — 1 + 2 + 1.
3te Potenz 1 + 3 + 3 + 1
4te Pot. — 1 + 4 + 6 + 4 + 1
5te Pot. — 1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1

das 1te und letzte Coefficient bleibt immer 1.

Dieses Gesetz würde aber für die Anwendung nicht bequem sein, denn man die nte ~~Glied~~ Potenz aus einem [illegible] erhalten wird wenn man schon die (n-1) Potenzen gemacht hätte.

Newton kam beim Bin. Lehrsatz kürzer und gab eine gute Entwicklung an, daß man jede nte Potenz unabhängig von jeder vorhergehenden finden kann, ~~damit~~ Dieses Gesetz entdeckt man wenn man ~~die~~ ~~Coefficienten~~ die Exponenten von a neben einander als Zähler, und die von b neben einander als Nenner in ihrer Reihenfolge schreibt: wie z.B. bei der 3ten Potenz z.B. und den Nenner gesetzt kommt b nicht im 2ten Glied: [illegible] und dasselbe folgt beim [illegible]:

$$\frac{3.2.1.0}{0.1.2.3} = \frac{3.2.1}{1.2.3}$$

Diese Anmerkung bringt der Verfasser bei Bestimmung der Coeff[illegible] vor.

$\frac{3.2.1}{1.2.3}$

das eigentlich 2te Glied aus 2 Theilen zusammen [illegible] da das 1te Glied zu nennen. in dem [illegible] das wirkliche erste Glied immer die Kraftzahl [illegible]

Auf diese Anwendung kann man nun leicht die Bestimmung der Kraftzahlen vornehmen, und zwar man streicht in diesem so formirten Bruche, von der untern zur Linken so viel ~~Zahlen~~ Zahlen einander weg als die Zahl des Gliedes anzeigen hat zu welchem man die Kraftzahl sucht. z. B. vom Cubus das erste Glied

$$\frac{3.2.1}{1.2.3} = \frac{3}{1} = 3.$$

2te Glied $\frac{3.2 \mid 1}{1.2 \mid 3} = \frac{3.2}{1.2} = \frac{3}{1} = 3.$

Zu d. 5te Potenz.

$\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}$.

das 1te Glied $= \frac{5}{1} = 5$

das 2te Glied $= \frac{5.4}{1.2} = \frac{5.2}{1} = 10$

das 3te Glied $= \frac{5.4.3}{1.2.3} = \frac{5.2}{1} = 10.$

das 4te Gl. $= \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} = \frac{5}{1} = 5.$

das 5te Glied $= \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} = 1.$

Um nun dieses [illegible] den Übergang zu einer allgemeinen Entwickelung der Potenz und [illegible] Gesetz betreffen wird man z. B.

(a+b)^5 so schreiben.

$$(a+b)^5 = a^5 + \frac{5}{1}a^{5-1}b^1 + \frac{5.4}{1.2}a^{5-2}b^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3}a^{5-3}b^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}a^{5-4}b^5 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}a^{5-5}b^5;$$

Will man nun die m^{te} Potenz von $(a+b)$ suchen so würde man auf obigen Gesetzen statt $5 = m$ setzen und es ist also die Frage wie wird das r^{te} Glied der Potenz aussehen.

Es wird aus denen Gründen im allgemeinen Produkt [illegible] also a^{m-r} haben. Zum [illegible] wird im Nenner $1 2 3 \ldots r$ stehen im Zähler dagegen $m . m-1 . m-2 \ldots m-(r-1)$; [illegible] ~~[illegible]~~ [illegible] nach der Stelle des Glieds [illegible] [illegible] [illegible]

damit doch ein allgemeinen [illegible] daß das 2te Glied der Reihe das 1te ist, wie p 120 oben gesagt worden, heißt ist im [illegible] Glied b^{r-1} $a^{m-(r-1)}$ der Zähler des Coeff. $m.(m-1)\cdots(m-[r-2])$ der Nenner $1.2\ldots(r-1)$

$$a+b|^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.\,m-1}{1.\,2.}.a^{m-2}b^2 + \frac{m.\,m-1.\,m-2}{1.\,2.\,3}.a^{m-3}b^3 + \frac{m.\,m-1.\,m-2 \ldots m-3}{1.\,2 \ldots 4}a^{m-4}b^4 + \ldots$$

$$+ \frac{m.\,m-1.\,m-2 \ldots\ldots (m-(r-4)).(m-(r-3)).(m-(r-2))}{.\,2.\,3.\,\ldots\ldots (r-3).(r-2).(r-1)}a^{m-(r-1)}b^{(r-1)} + \text{das } r^{te} \text{ Glied}$$

$$+ \frac{m.\,m-1.\,m-2 \ldots\ldots (m-(r-3)).(m-(r-2)).(m-(r-1))}{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots (r-1).\,r}a^{m-r}b^r + \text{das } (r+1)^{te} \text{ Glied}$$

$$+ \frac{m.\,m-1.\,m-2.\,\ldots (m-(r-2)).(m-(r-1)).(m-r)}{.\,2.\,3.\,\ldots (r-1).\,r.\,(r+1)}a^{(m-(r+1))}b^{r+1} + \ldots \text{das } (r+2)^{te} \text{ Glied}$$

Man kann sich nun die Frage aufwerfen: wie [illegible] man jedes gegebene Glied unmittelbar

Zu [illegible] 5 Seite 162 aus seinem vorhergehenden bilden?

Deshalb vergleiche man das r^{te} Glied mit dem $(r+1)^{ten}$.

das r^{te} Glied ist $= \frac{m.\,m-1.\,m-2\,\ldots\ldots(m-(r-2)).\,(m-(r-1))}{1.\;2.\;3\,\ldots\ldots\,(r-2)(r-1).\;r.}\,a^{m-r}b^{r}; = R;$

das $(r+1)^{te}$ Glied $= \frac{m.\,m-1.\,m-2\ldots-(m-(r-1)).(m-(r))}{1.\;2.\;3\,\ldots\ldots\,r.\,(r+1)}\,a^{m-(r+1)}b^{r+1} =$

$$= \frac{m.\,m-1.\,m-2\,\ldots\ldots(m-(r-2)).(m-(r-1))}{1.\;2.\;3\,\ldots\ldots\,(r-1).\;r.} \times \frac{m-r}{r+1}\cdot\frac{a^{m-r}}{a}\,b^{r}.\,b =$$

$$\underbrace{R.\frac{m-r}{r+1}\times\frac{b}{a}};$$

dieser Ausdruck ist [illegible] (r+1)^{te} Glied kann also aus dem vorhergehenden zu berechnen. Es ergiebt sich durch Rechnung: das (r+1)^{te} Glied ~~r~~ r^{te} Glied [illegible] man [illegible] hat b um eine Potenz höher und a um eine Potenz niedriger, [illegible] mit den Factoren $\frac{m-r}{r+1}$ und $\frac{b}{a}$ multiplicirt. d. h. mit einem Bruche dessen Zähler also muss der litterarische Ausdruck des r^{ten} Glieds mit $\frac{b}{a}$ multiplicirt [illegible] die Differenz des Binomial Exponenten und der Stelle des [illegible]. der Coefficient des (r+1)^{ten} Ausdrucks wird aus dem Coeff des [illegible] ist, aus dem des folgenden Glieds zu r^{ten} Ausdr. gebildet indem man [illegible] werden [illegible], [illegible] dessen Nenner die [illegible] letzten Factor des Zählers um 1 vermindert, und als neuen Factor [illegible] zu [illegible] Glieds ist; [illegible] Factor anfügt, und den letzten Factor des Nenners um 1 [illegible] mit einem Quotienten der [illegible] vermehrt, und als neuen Factor [illegible] wenn er den [illegible] Theil d. Binom anfügt, [illegible] die letzten Factoren $\frac{m-(r+1)}{r}$, so [illegible] den [illegible] [illegible]. muss des Coeff mit $\frac{m-r}{r+1}$ x [illegible] geändert

Wollte man nun [illegible] ~~[illegible]~~ Glied $\left(1^{te}\right)$

und dem vorhergehenden bilden zu können wenn das wirklich erste a^m = dem 0ᵗᵉ Glied nennen.

weil das 1ᵗᵉ Gl. d. (r+1)ᵗᵉ ist, so ist r=0

und so wären diese $a^m\cdot\frac{m-r}{r+1}\cdot\frac{b}{a} = a^m\cdot\frac{m-0}{0+1}\cdot\frac{b}{a} = \frac{m}{1}\cdot a^{m-1}b$;

das ~~1ᵗᵉ~~ 2ᵗᵉ Glied $=\frac{m}{1}a^{m-1}b\times\frac{m-r}{r+1}\times\frac{b}{a}=\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2$;

das 3ᵗᵉ Glied $=\frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2\times\frac{m-2}{3}\times\frac{b}{a}=\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3$;

Zusatz 6. Seite 167.

Um nun diese Formel ~~deutlich~~ sie zur Anwendung selbst bequemer ist in eine andere Form zu bringen, setze man mit allen Schriftstellern der Kürze $\frac{b}{a}=Q$, das 1ᵗᵉ Glied des Binoms $=P$, und begreife jedes Glied des entwickelten Binoms seiner Reihe in natürlicher Ordnung nach A, B, C, D … so wird nun das Binom folgende kurze Gestalt bekommen:

$\frac{b}{a}=Q$,
$a=P$;

$$(a+b)^m = \overset{A}{P^m} + \overset{B}{\frac{m}{1}AQ} + \overset{C}{\frac{m-1}{2}\cdot BQ} + \overset{D}{\frac{m-2}{3}CQ} + \overset{E}{\frac{m-3}{4}DQ} + \overset{F}{\frac{m-4}{5}EQ} + \dots$$

Da nun in der Anwendung bald die eine bald die andere Form vorkommt, so soll hier noch einmal die andere Form wiederholt werden, also:

$$(1)\quad (a+b)^m = a^m + \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 + \frac{m.m-1.m-2\dots m-4}{1.2\dots 5}a^{m-5}b^5 + \dots$$

Zusatz 7.

In der Anwendung kommen nun aber selten ganze und + Binom. Potenzen vor, in der Regel hat man es mit Brüchen und √ Ausziehungen zu thun.

Die Fälle die hier vorkommen können sind folgende:

$$\text{I.}\ (a+b)^m = (a+b)^m;$$

$$\text{II}\ \frac{A}{(a+b)^n} = A(a+b)^{-n}; =$$ nach d. gewöhnlichen Art 2 Operationen

$$\text{III}\ \sqrt[v]{(a+b)^m} = (a+b)^{\frac{m}{v}}; =$$ …………… 2 Operationen

$$\text{IV}\ \frac{A}{\sqrt[v]{(a+b)^m}} = A.(a+b)^{-\frac{m}{v}}; =$$ …………… 3 Operationen

Man könnte zwar alle diese 4 Fälle nach gewöhnlichen Regeln ausrechnen, allein dann würde es ungeheure Arbeit erfordern, besonders im IVten Falle, und hier zeigt es gerade wie d. Binomische Lehrsatz die größten Vortheile gewährt.

Es muss also nur noch bewiesen werden dass das was von + ganzen Exp: gilt, auch von − ganzen, und + u. − gebrochenen Exp. gilt.

vid. Functionen [illegible]

Hier erinnere ich d. Funktionen von einerlei Exp. und der mit ihnen vorgenommenen Operationen, nämlich daß einerlei Exp. × zu d. potenzirt ec. immer wieder einerlei Exp. geben.

In unsrem Falle sagen wir nun zuerst

$m, = \frac{u}{v}$ ist:

$$(a+b)^{\frac{u}{v}} = \overset{A}{P^{\frac{u}{v}}} + \frac{u}{v}\overset{B}{A}Q + \frac{u-v}{2v}\overset{C}{B}Q + \frac{u-2v}{3v}\overset{D}{C}Q + \frac{u-3v}{4v}\overset{E}{D}Q + \frac{u-4v}{5v}\overset{F}{E}Q + \ldots\ldots$$

Zusatz 8.

Wäre nun das Binom von der Form $(a-b)^m$ so würde die Operation dieselbe bleiben, nur mit dem Unterschied daß alle ungeraden Potenzen von b negativ seyn würden, daher:

denn allerdings ist $(a+b)^m = [a+(-b)]^m$, und $(-b)$ statt (b) in die Reihe gesetzt gibt die ungeraden Potenzen (−) also auch die Glieder der ung. Potenzen von b (−)

$$(a\pm b)^m = a^m - \frac{m}{1}a^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 - \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}a^{m-4}b^4 - \ldots$$

Für die allgemeine Formel

$P^m + \frac{m}{1}AQ + \frac{m-1}{2}BQ + \frac{m-2}{3}CQ + \ldots$ würde im reinen Binom $(a-b)$ auch der Quotient $\frac{-b}{+a} = -Q$ seyn, welches zu berücksichtigen, also

$$(a\pm b)^n = \overset{A}{P^m} \pm \frac{m}{1}\overset{B}{A}Q + \frac{m-1}{2}\overset{C}{B}Q \pm \frac{m-2}{3}\overset{D}{C}Q + \frac{m-3}{4}\overset{E}{D}Q \pm$$

denn das 1te Gl. ist + die übrigen werden weg. $-Q$ alle −, wenn das der 2 an sich − ist, folglich $-B \times -Q = + = C$, $C \times -Q = -D$.

Zusatz 9 und 10.

Ueber Bestimmung der Glieder ihrer Anzahl nach bei einem Binom welches [illegible] + [illegible] − [illegible] ± [illegible] Exp. hat.

Daß $(a\pm b)^m$ eine bestimmte Anzahl Glieder nämlich $m+1$ Glied haben muß erhellet schon aus dem Vorhergehenden; allein auch noch aus der Bildung der Coefficienten, denn wenn r gleich m wird in $\frac{m.m-1.m-2.\ldots\ldots m-r}{1.2.3.4.5 r.(r+1)}$ so ist [illegible]

[illegible] ~~positive~~ [illegible] ist Exp. ~~m~~ gerade [illegible] so ist das 2te Glied Coeff $= \Delta$ gegen $+A.x - \Delta.-Q = +$, das 3te Gl. $\cdot +B.-\Delta-Q = +$ u. s. w.

126.

des $(r+1)^{te}$ Glied zum Koeffizient $\frac{0}{r+1} \cdot R \cdot Q = \underline{0}$.
Hier ist auch das ganze Glied $= 0$;

Exponent $-m$ Ist aber d. Exponent $-m$ so ist es klar daß diese die Formel $\frac{-m \cdot -m-1 \cdot -m-2 \cdot -m-3 \cdot \ldots -m-r}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots\ldots\ldots -m-(r+1)} \ldots$ immer mehr zu negativen Einheiten im Zähler zurück, welche unendlich wird.

Exp. $= +\frac{u}{v}$ Ist d. Exponent $+\frac{u}{v}$, woraus erhellt daß er sich nicht auf eine ganze Zahl reduziren lasse, so kann auch hier die Reihe $\frac{u}{v}-1$, $\frac{u}{v}-2$, $\frac{u}{v}-3$, ..4 −5 .... nie aufhören.

Exp. $-\frac{u}{v}$ bey $-\frac{u}{v}$ kann nun auch deshalb die Reihe nie aufhören

Von den 11^{te} u. 12^{te} Zusatz nach pag. 170 des 77^{te} §.

Aufgabe.

Ein Binom mit ganzem Exponent zu bestimmen. Werden mir hier Zahlen gegeben so ist es am vortheilhaftesten sie nach dem tabellischen Gesetz zu [illegible] z.B.

$(87)^4 \underset{x}{=} (80+7)^4$. Nach der Formel

$$P^m + \frac{m}{1}\overset{B}{AQ} + \frac{m-1}{2}\overset{C}{BQ} + \frac{m-2}{3}\overset{D}{CQ} + \frac{m-3}{4}\overset{E}{DQ} + \ldots$$

entwickelt, wird $P = 80$ $Q = \frac{7}{80}$ und es ist daher:

$P^m = 80^m = 80^4 = \ldots = 40960000 = A;$

$\frac{m}{1}AQ = \frac{4}{1}\cdot 40960000\cdot\frac{7}{80} = 4\cdot 512000\cdot 7 = \ldots = 14336000 = B;$

$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{3}{2}\cdot 14336000\cdot\frac{7}{80} = 89600\cdot 3\cdot 7 = \ldots = 1881600 = C.$

$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{2}{3}\cdot 1881600\cdot\frac{7}{80} = 7840\cdot 2\cdot 7 = \ldots = 109760 = D;$

$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{1}{4}\cdot 109760\cdot\frac{7}{80} = 343\times 7 \ldots = 2401 = E;$

$\frac{m-4}{4}EQ = \frac{0}{4}\cdot 2401\cdot\frac{7}{80} = 0 \ldots = 0 =$

$57289761 = (84)^4;$

Ein andres Beispiel sey:

$(2a-3x^2)^5 =$ worin $P = 2a$ und $Q = -\frac{3x^2}{2a}$ ist, $m = 5;$

$P^m = (2a)^5 = 32a^5 = A.$

$\frac{m}{1}AQ = \frac{5}{1}\cdot 32a^5\cdot -\frac{3x^2}{2a} = -240a^4x^2 = B$

$\frac{m-1}{2}BQ = \frac{4}{2}\cdot -240a^4x^2\cdot -\frac{3x^2}{2a} = +720a^3x^4 = C$

$\frac{m-2}{3}CQ = \frac{3}{3}\cdot 720a^3x^4\cdot -\frac{3x^2}{2a} = -1080a^2x^6 = D$

$\frac{m-3}{4}DQ = \frac{2}{4}\cdot -1080a^2x^6\cdot -\frac{3x^2}{2a} = +810ax^8 = E$

$\frac{m-4}{5}EQ = \frac{1}{5}\cdot 810ax^8\cdot -\frac{3x^2}{2a} = -243x^{10} = F.$

also

$(2a-3x^2)^5 = 32a^5 - 240a^4x^2 + 720a^3x^4 - 1080a^2x^6 + 810ax^8 + 243x^{10};$

Ferner sey zu potenziren $\sqrt{a^2 \pm x^2} = (a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}};$

$\sqrt{a^2 \pm x^2} = (a^2 \pm x^2)^{\frac{1}{2}}$ und hier iſt in der Formel

$$\overset{A}{P^{\frac{u}{v}}} \pm \frac{u}{v} \overset{B}{A} Q + \frac{u-v}{2v} \overset{C}{B} Q \pm \frac{u-2v}{3v} \overset{D}{C} Q \pm \frac{u-3v}{4v} D Q + \ldots$$

$P = a^2$; $Q = \pm\frac{x^2}{a^2}$ und $\frac{u}{v} = \frac{1}{2}$; u. daher.

$$P^{\frac{u}{v}} = (a^2)^{\frac{u}{v}} = a = A.$$

$$\frac{u}{v} AQ = \frac{1}{2} a \pm \frac{x^2}{a^2} = \pm \frac{1}{2} \frac{x^2}{a} = B;$$

$$\frac{u-v}{2v} BQ = \frac{1-2}{4} \cdot \pm \frac{1}{2} \frac{x^2}{a} \cdot \pm \frac{x^2}{a^2} = -\frac{1}{2 \cdot 4} \frac{x^4}{a^3} = C$$

$$\frac{u-2v}{3v} CQ = \frac{1-4}{6} = -\frac{3}{6} \times -\frac{1}{2 \cdot 4} \frac{x^4}{a^3} \cdot \pm \frac{x^2}{a^2} = \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^6}{a^5} = D$$

$$\frac{u-3v}{4v} DQ = -\frac{5}{8} \times \pm \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^6}{a^5} \cdot \pm \frac{x^2}{a^2} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \cdot \frac{x^8}{a^7} = E;$$

$$\frac{u-4v}{5v} EQ = -\frac{7}{10} \cdot -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{x^8}{a^7} \cdot \pm \frac{x^2}{a^2} = \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{x^{10}}{a^9} = F;$$

$$\frac{u-5v}{6v} FQ = -\frac{9}{12} \cdot \pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{x^{10}}{a^9} \cdot \pm \frac{x^2}{a^2} = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12} \cdot \frac{x^{12}}{a^{11}} = G.$$

Jetzt iſt das Geſetz der Fortſchreitung d. Reihe hinlänglich klar und man kann ſie leicht bis ins Unendliche fortſetzen; das nächſte Glied wird ſeyn

$$\pm \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots 11}{2 \cdot 4 \cdot \ldots\ldots 14} \cdot \frac{x^{14}}{a^{13}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots 13}{2 \cdot 4 \cdot \ldots 16} \cdot \frac{x^{16}}{a^{15}} \pm \ldots$$

Wollte man nun aus dem Ausdruck $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ die Wurzel wirklich ausziehen, so würde man auf diese Reihe kommen, indessen nebst der schwierigen Arbeit würde es noch folgenden Nachtheil haben, daß das Gesetz d. Fortschreitung in d. Factoren der Coefficienten, welche sich nach der Binomialschen und den ersten paar Gliedern giebt, sich hier verdeckt zeigt, indem die Zahl im Nenner gemacht und Zähler ~~in dem~~ als Product erscheinen:

$$\sqrt{a^2 \pm x^2} = a \pm \frac{x^2}{2a} - \frac{x^4}{8a^3} \pm \frac{x^6}{16a^5} - \frac{5x^8}{128a^7} \pm \frac{7x^{10}}{256a^9} - \cdots$$

$$\underset{-}{+} a^2$$

$$\pm \cancel{x^2} \qquad : 2a.$$

$$\underset{\mp}{\pm} \cancel{x^2} \underset{-}{+} \frac{x^4}{4a^2}$$

$$-\cancel{\frac{x^4}{4a^2}} \qquad : \left(2a \pm \frac{x^2}{a}\right)$$

$$\underset{+}{-} \cancel{\frac{x^4}{4a^2}} \underset{\pm}{\mp} \frac{x^6}{8a^4} \underset{-}{+} \frac{x^8}{64a^6}$$

$$\pm \cancel{\frac{x^6}{8a^4}} - \frac{x^8}{64a^6} \qquad : \left(2a \pm \frac{x^2}{a} - \frac{x^4}{4a^3}\right)$$

$$\underset{\mp}{\pm} \cancel{\frac{x^6}{8a^4}} \underset{-}{+} \frac{x^8}{16a^6} \underset{\pm}{\mp} \frac{x^{10}}{64a^8} \underset{-}{+} \frac{x^{12}}{256a^{10}}$$

$$-\cancel{\frac{5x^8}{64a^6}} \pm \frac{x^{10}}{64a^8} - \frac{x^{12}}{256a^{10}} \qquad : \left(2a \pm \frac{x^2}{a} - \frac{x^4}{4a^3} \pm \frac{x^6}{8a^5}\right)$$

$$\underset{+}{-} \cancel{\frac{5x^8}{64a^6}} \underset{\pm}{\mp} \frac{5x^{10}}{128a^8} \underset{-}{+} \frac{5x^{12}}{512a^{10}} \underset{\pm}{\mp} \frac{5x^{14}}{1024a^{12}} \underset{-}{+} \frac{25x^{16}}{16384a^{14}}$$

$$\pm \frac{7x^{10}}{128a^8} - \frac{7x^{12}}{512a^{10}} \pm \frac{5x^{14}}{1024a^{12}} - \frac{25x^{16}}{16384a^{14}} \qquad : \left(2a \pm \frac{x^2}{a} - \frac{x^4}{4a^3} \pm \frac{x^6}{8a^5} - \frac{5x^8}{64a^7}\right)$$

Aus dem vorhergehenden ist nun klar daß für alle Fälle von d. Art $\sqrt[2]{a^2 \mp x^2}$ die vorhin erhaltenen Reihen immer als Konstruktionen erscheinen müssen, u. deshalb ist es für die Folge gut, sie bis zum 20ten Glied in Decimalen auszudrucken, weil es sich f. d. Anwendung gleich [illegible] (vide. Anhang z. Algebr. Vorlage)

Rechnung für d. Aufg. zu machen. d. Mittel [illegible] zu [illegible] man z. B. f. d. doppelt so großen Zahl dieselben Operationen macht u. so muß sie [illegible] immer das doppelte von anderen zeigen. etc.

So sei nun zu suchen: $\frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \frac{1}{(a^2 \pm x^2)^{\frac12}} = (a^2 \pm x^2)^{-\frac12}$

Hier ist. $P = a^2$; $Q = \pm \frac{x^2}{a^2}$; $u = -1$; $v = +2$;

$$P^{\frac{u}{v}} = (a^2)^{-\frac12} = a^{-\frac22} = \frac1a = A.$$

$$\frac{u}{v} AQ = -\frac12 \cdot +\frac1a \cdot \pm \frac{x^2}{a^2} = \mp \frac12 \cdot \frac{x^2}{a^3} = B$$

$$\frac{u-v}{2v} BQ = -\frac34 \mp \frac12 \cdot \frac{x^2}{a^3} \cdot \pm \frac{x^2}{a^2} = + \frac{1.3.}{2.4.} \frac{x^4}{a^5} = C$$

$$\frac{u-2v}{3v} CQ = -\frac56 + \frac{1.3.}{2.4} \frac{x^4}{a^5} \pm \frac{x^2}{a^2} = \mp \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^6}{a^7} = D$$

$$\frac{u-3v}{4v} DQ = -\frac78 \mp \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^6}{a^7} \pm \frac{x^2}{a^2} = + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \frac{x^8}{a^9} = E \text{ und}$$

$$\frac{1}{\sqrt[2]{a^2 \pm x^2}} = \frac1a \mp \frac12 \cdot \frac{x^2}{a^3} + \frac{1.3.}{2.4} \frac{x^4}{a^5} \mp \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^6}{a^7} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} \frac{x^8}{a^9} \mp$$

$$\mp \frac{1.3.5.7.9}{2.4\ldots10} \frac{x^{10}}{a^{11}} + \frac{1.3\ldots11}{2.4\ldots12} \frac{x^{12}}{a^{13}} \mp \frac{1.3\ldots13}{2.4\ldots14} \frac{x^{14}}{a^{15}} + \ldots\ldots$$

Hier diese Reihe $\frac{1}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$ zu entwickeln. ~~Hier~~

Aus diesen Coefficienten, die dem Bin. in d. Anwendg [illegible] ist gut zu entwickeln (vid [illegible] Anhang) gut ist es diesen letzteren [illegible] 8 und ihnen die Coeff $\sqrt[2]{a+x^2}$ zu bestimmen.

Beispiel.

$$\frac{(a-2x)^2}{\sqrt[4]{(2a-\frac{1}{2}x^2)^3}} = (a-2x)^2 \cdot (2a-\tfrac{1}{2}x^2)^{-\frac{3}{4}};$$

Zuvörderst suche man die Nenner. bey ihm ist.

$$P = 2a, \quad Q = -\frac{x^2}{4a}; \quad u = -3; \quad v = 4. \text{ also:}$$

$$P^{\frac{u}{v}} = (2a)^{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . a^{\frac{3}{4}}} = A.$$

$$\frac{u}{v} AQ = -\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . a^{\frac{3}{4}}} \cdot -\frac{x^2}{4a} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . 4} \cdot \frac{x^2}{a^{\frac{7}{4}}} = B$$

$$\frac{u-v}{2v} BQ = -\frac{7}{8} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . 4.} \cdot \frac{x^2}{a^{\frac{7}{4}}} \cdot -\frac{x^2}{4a} = +\frac{3.7}{4.8} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . 4^2} \cdot \frac{x^4}{a^{\frac{11}{4}}} = C$$

$$\frac{u-2v}{3v} CQ = -\frac{11}{12} \cdot \frac{3.7}{4.8} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . 4^2} \cdot \frac{x^4}{a^{\frac{11}{4}}} \cdot -\frac{x^2}{4a} = \frac{3.7.11}{4.8.12} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . 4^3} \cdot \frac{x^6}{a^{\frac{15}{4}}} = D$$

und der Ausdruck ist

$$\sqrt[4]{(2a-\tfrac{1}{2}x^2)^3} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . a^{\frac{3}{4}}} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . 4} \cdot \frac{x^2}{a^{\frac{7}{4}}} + \frac{3.7}{4.8} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . 4^2} \cdot \frac{x^4}{a^{\frac{11}{4}}} +$$

$$+ \frac{3.7.11}{4.8.12} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . 4^3} \cdot \frac{x^6}{a^{\frac{15}{4}}} + \frac{3.7.11.15}{4.8.12.16} \cdot \frac{1}{2^{\frac{3}{4}} . 4^4} \cdot \frac{x^8}{a^{\frac{19}{4}}} + \ldots$$

wäre nun noch mit $(a-2x)^2 = a^2 - 4ax + 4x^2$ zu multipliciren; bequemer ist es bei Ausdrücken wie oben die rationalen Theile wie die irrationalen zu kennen und letztere in eine Parenthese zu schließen und den irrat. Theil als Fact. vorzusetzen; wäre nämlich in allen Gliedern er vorkommt.

Hier ist überall d. Factor $\frac{1}{2^{\frac34}.a^{\frac34}}$, sondert man diesen heraus, x zuerst dann d. $(a-2x)^2$ ~~zu setzen~~ die Parenthese z

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(2a)^3}}\times\left[1+\frac{3}{4}\cdot\frac{x^2}{4a}+\frac{3.7}{4.8}\cdot\frac{x^4}{4^2a^2}+\frac{3.7.11}{4.8.12}\cdot\frac{x^6}{4^3a^3}+\frac{3.7.11.15}{4.8.12.16}\cdot\frac{x^8}{4^4a^4}+\frac{3.7.11.15.19}{4.8.12.16.20}\cdot\frac{x^{10}}{4^5.a^5}+\ldots\right.$$

$$a^2-4ax+4x^2$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{(2a)^3}}\times\left\{\begin{array}{l} a^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{ax^2}{4}+\frac{3.7}{4.8}\cdot\frac{x^4}{4^2}+\frac{3.7.11}{4.8.12}\cdot\frac{x^6}{4^3a}+\frac{3.7.11.15}{4.8.12.16}\cdot\frac{x^8}{4^4a^2}+\frac{3.7.11.15.19}{4.8.12.16.20}\cdot\frac{x^{10}}{4^5a^3}+\ldots \\ -4ax-\frac{3}{4}x^3-\frac{3.7}{4.8}\cdot\frac{x^5}{4.a}-\frac{3.7.11}{4.8.12}\cdot\frac{x^7}{4^2a^2}-\frac{3.7.11.15}{4.8.12.16}\,\frac{x^9}{4^3a^3}-\frac{3.7.11.15.19}{4.8.\ldots\ldots20}\cdot\frac{x^{11}}{4^4a^4}+\ldots \\ \qquad +4x^2+\frac{3}{4}\cdot\frac{x^4}{a}+\frac{3.7}{4.8}\,\frac{x^6}{4a^2}+\frac{3.7.11}{4.8.12}\,\frac{x^8}{4^2a^3}+\frac{3.7.11.15}{4.8.\ldots16}\,\frac{x^{10}}{4^3a^4}+\ldots \end{array}\right)$$

Es ist also der Ausdruck geordnet:

$$\frac{(a-2x)^2}{\sqrt[4]{(2a-\frac{1}{2}x^2)^3}}=\frac{1}{\sqrt[4]{(2a)^3}}\cdot\left[a^2-4a\,\Big|\,x\begin{matrix}+3a\\+4\end{matrix}\Big|\,x^2-\frac{3}{4}\,\Big|\,x^3\begin{matrix}+\frac{3.7}{4.8.4^2}\\+\frac{3}{4a}\end{matrix}\Big|\,x^4-\frac{3.7}{4.8.4.a}\,\Big|\,x^5+\right.$$

$$\begin{matrix}+\frac{3.7.11}{4.8.12.4^3a}\\+\frac{3.7}{4.8.4.a^2}\end{matrix}\Big|\,x^6-\frac{3.7.11}{4.8.12.4^2a^2}\,\Big|\,x^7\begin{matrix}+\frac{3.7.11.15}{4.8.12.16.4^4a^2}\\+\frac{3.7.11}{4.8.12.4^2a^3}\end{matrix}\Big|\,x^8-$$

$$\left.-\frac{3.7.11.15}{4.8.12.16\,4^3a^3}\,\Big|\,x^9\begin{matrix}+\frac{3.7\ldots\ldots19}{4.8\ldots20\,4^5a^3}\\+\frac{3.7\ldots15}{4.8\ldots16.4^3a^4}\end{matrix}\Big|\,x^{10}-\frac{3.7\ldots\ldots19}{4.8\ldots20.4^4a^4}\,\Big|\,x^{11}\right]$$

Seite 56. Zeile 2.

Wenn einen mehrtheiligen Ausdruck in eine Potenz zu erheben ist, so kann man sich des Kunstgriffes bedienen einen Ausdruck gleich als einen Theil und den letzten als den 2ten Theil zu betrachten, gewöhnlich nimmt man dann die übrigen Glieder. Wenn man sich es zu erleichtern zu suchen. Auch wir können solche Ausdrücke immer nur fortsetzen, nur stellen wir 3 theiligen Größen.

$(u+x+y+z)$ in die 4te Potenz zu erheben.

$(u+x+y+z)^4 =$ wenn $(u+x+y) = A$ ist; $= (A+z)^4$.

$(A+z)^4 = A^4 + 4A^3z + 6A^2z^2 + 4Az^3 + z^4$;

Nennen wir $(u+x) = B$ so ist $A = (B+y)$ und die verschiedenen Potenzen von A. =

$(B+y)^2 = B^2 + 2By + y^2$

$(B+y)^3 = B^3 + 3B^2y + 3By^2 + y^3$

$(B+y)^4 = B^4 + 4B^3y + 6B^2y^2 + 4By^3 + y^4$;

Setzt man nun für die Potenzen von A, diejenigen von $(B+y)$, so ist ein Ψ.

$$(B+y+z)^4 = B^4 + 4B^3y + 6B^2y^2 + 4By^3 + y^4 + 4z(B^3 + 3B^2y + 3By^2 + y^3) + 6z^2(B^2 + 2By + y^2) + 4z^3(B+y) = \Phi,$$

Nun B den Werth $(u+x)$ so ist $B^2 = u^2 + 2ux + x^2$; $B^3 = u^3 + 3u^2x + 3ux^2 + x^3$; u. $B^4 = u^4 + 4u^3x + 6u^2x^2 + 4ux^3 + x^4$;

die Werthe für B in Φ gesetzt, stellt:

$$u^4 + 4u^3x + 6u^2x^2 + 4ux^3 + x^4 + 4y(u^3 + 3u^2x + 3ux^2 + x^3) + 6y^2(u^2 + 2ux + x^2) + 4y^3(u+x) + y^4 +$$

verte

Wenn man beim Substituiren in Ψ und eben so bei Φ zugl. die Ordnung beobachtet, so erhält man folgende Formeln

$$(u+x+y+z)^4 = u^4 + 4u^3(x+y+z) + 6u^2(x+y+z)^2 + 4u(x+y+z)^3 + (x+y+z)^4$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + 2x(y+z) + (y+z)^2$$

$$(x+y+z)^3 = x^3 + 3x^2(y+z) + 3x(y+z)^2 + (y+z)^3$$

$$(x+y+z)^4 = x^4 + 4x^3(y+z) + 6x^2(y+z)^2 + 4x(y+z)^3 + (y+z)^4$$

$$(y+z)^2 = y^2 + 2yz + z^2$$

$$(y+z)^3 = y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$$

$$(y+z)^4 = y^4 + 4y^3z + 6y^2z^2 + 4yz^3 + z^4$$

134.

$$+4z\left[(u^3+3u^2x+3ux^2+x^3)+3y(u^2+2ux+x^2)+3y^2(u+x)+y^3\right]+$$

$$+6z^2\left[u^2+2ux+x^2+2y(u+x)+y^2\right]+4z^3\left[u+x+y\right];$$

F Es ist nicht ganz richtig ausgesprochen
$(a+b)^{n-1}$ ist nicht = der Reihe ψ, weil die
Coeff. fehlen, allein darauf kommt es hier nicht an. Man sollte sagen
Entwickelt man aus $(a+b)^{n-1}$ die Summe ψ.
Litteral-Glieder, welche die Reihe ψ
geben, und x-t diese mit $(a-b)$ so
ist das Product $= a^n-b^n$
Entwickelt man aus $(a-b)^{n-1}$ die
Litteral-Glieder, welche die Reihe φ
geben und x-t diese mit $(a+b)$
so ergiebt sich ein Product =
$a^n \pm b^n$

Man kann sich nun auch Formeln entwickeln zu [illegible] wie es nicht die eine oder die andere Art [illegible]

Zusätze 11. u. 12. Seite 166.

Dieser Satz [illegible] die Summen und Differenzen zwar in gleichen Dignitäten erhobenen Größen.

Erhebt man nun also $(a+b)$ in die $(n-1)^{te}$ Potenz so sind die *litteralischen Producte* folgende:

$$F\ (a+b)^{n-1} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + a^{n-4}b^3 + \ldots\ldots a^3b^{n-4} + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1} = \psi$$

x folgt mit $a-b$

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 \ldots\ldots + a^4b^{n-4} + a^3b^{n-3} + a^2b^{n-2} + ab^{n-1}$$

$$-a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots - a^3b^{n-3} - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n;$$

$$= a^n - b^n;$$

Erheben nun $(a-b)$ zur $(n-1)$. Potenz so sind die litteralischen Producte:

$$(a-b)^{n-1} = a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - a^{n-4}b^3 + \ldots\ldots \mp a^3b^{n-4} \pm a^2b^{n-3} \mp ab^{n-2} \pm b^{n-1} =$$

x giebt $a+b$

$$a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots \mp a^4b^{n-4} \pm a^3b^{n-3} \mp a^2b^{n-2} \pm ab^{n-1}$$

$$+a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 + a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots \mp a^3b^{n-3} \pm a^2b^{n-2} \mp ab^{n-1} \pm b^n;$$

$$= a^n \pm b^n;$$ die doppelten Zeichen sind [illegible]

die verschiedenen Fälle wo n eine grade oder un- + wenn n ungrade, − wenn n grade ist weil abgesehen $\pm b^{n-1}$ abhängt, daß mit $-b$ multiplicirt wird

grade Zahl ist: ~~daraus~~ Es ist also, wenn man ausgedehnter schließt

$$a^{2r}-b^{2r}=\left(a^{2r-1}-a^{2r-2}b+a^{2r-3}b^2-a\ldots\ldots\ldots-a^2b^{2r-3}+ab^{2r-2}-b^{2r-1}\right)\underline{(a+b)}$$

$$a^{2r}-b^{2r}=\left(a^{2r-1}+a^{2r-2}b+aa^{2r-3}b^2+\ldots\ldots\ldots+a^2b^{2r-3}+ab^{2r-2}+b^{2r-1}\right)\underline{(a-b)}$$

Da und

$$a^{2r+1}-b^{2r+1}=\left(a^{2r}+a^{2r-1}b+a^{2r-2}b^2+a^{2r-3}b^3+\ldots+a^3b^{2r-3}+a^2b^{2r-2}+ab^{2r-1}+b^{2r}\right).\underline{(a-b)}$$

~~$a^{2r+1}-b^{2r+1}=\left(a^{2r}-a^{2r-1}b+a^{2r-2}b^2\ldots+a^2b^{2r-2}-ab^{2r-1}+b^{2r}\right).(a+b)$~~

~~$a^{2r+1}+b^{2r+1}=\left(a^{2r}+a^{r-1}b+a^{2r-2}b^2\ldots+a^2b^{2r-2}+ab^{2r-1}+b^{2r}\right).(a+b)$~~

$$a^{2r+1}+b^{2r+1}=\left(a^{2r}-a^{2r-1}b+a^{2r-2}b^2-\ldots\ldots+a^2b^{2r-2}-ab^{2r-1}+b^{2r}\right).(a+b)$$

Das Oben angezeigten erhellt also:

die Differenz zweyer gleichen graden Dignitäten, läßt sich allemal auf eine doppelte Art in Factoren zerfällen.

1) Ein Factor enthält die Summe d. Vzeln der andre eine Reihe, die die litter: Werthe der $(n-1^{ten})$ Potenz von der Differenz der Vzln bilden denn die Differenz der V zur $(n-1)^{te}$ Potenz erheben

2) Ein Factor hat die Diff: d. V, d. d. andre die Reihe der litt: Werthe (i. e. Summe der V zur $(n-1)^{te}$ Potenz erheben.

~~die Differenz und Summe 2er gleichen ungraden Dignitäten; läßt sich dagegen so auflösen, daß der eine Factor entweder correspondirend die Summe od. Differenz d. beiden V, und der 2te Factor dagegen die litteralisch Producte, umgekehrt~~

Die Differenz 2er ungraden Dignitäten hat nur einen Werth nämlich das Product der Diff: der Wurzel und der Reihe der litt: Glieder aus der Summe der Wurzel erhoben zu $n-1^{ten}$ Potenz

Die Summe 2 Dignitäten kann nur bestimmt w. wenn sie ungerade sind, sie ist dann gleich dem Producte der Summe der Vzln, und der Reihe der litt: Glieder aus d. Diff der V. erhoben zu $(n-1)^{ten}$ Potenz

~~entweder d. Summe od. die Differenz zweier [illegible]~~ Potenz derselben enthält.

Beispiele.

$$a^4-b^4 = (a-b)(a+b)^3$$
$$= (a+b)(a-b)^3$$

$$a^5-b^5 = (a-b)(a+b)^4$$
$$\cancel{= (a+b)(a-b)^4}$$

$$a^5+b^5 = (a+b)(a-b)^4$$
$$\cancel{= (a+b)(a-b)^4}$$

d. h. nur in Bezug auf die litteralischen Producte.

Die Summe zweier gleich großen geraden Dignitäten ist dagegen nicht möglich. Obgleich sie eigentlich auch nicht hierher gehört, so ist sie aus folgendem einfachen klar:

$(x+a)^2 = x^2+2ax+a^2$

$(x-a)^2 = x^2-2ax+a^2$

$(x+a)(x-a) = x^2-a^2$; mithin nirgend ist a^2+x^2 allein zu sehen. Ergiebt sich auch x^2+a^2 wäre gleich Null so ist.

$x^2+a^2=0$; $x^2=-a^2$; $x=\sqrt{-a^2}$ = eine unmögliche Größe, die wieder zurückzuführen ist;

Die Unmöglichkeit der Zerlegung beruht auf diesem Wege nicht sofern. Das angeführte Beispiel ist zugleich unrichtig. Denn daß x^2+a^2 nicht = ist $(x+a)(x+a)$, auch nicht = $(x-a)(x-a)$, auch nicht = $(x+a)(x-a)$, so kann es doch andere Combinationen von x und a geben, deren x^2+a^2 = ist. z. B.

$(a-b)a = a^2-ab$
$(a+b)b = ab+b^2$
$\Big\} = a^2+b^2 = (a-b)a + (a+b)b$

Allein dieses dient bloß für diesen speciellen Fall, der allgemeine Satz läßt sich auf keine Weise anfechten.

festgesetzt, denn $x=\sqrt{-a^2} \mp x = \pm a\sqrt{-1} \mp x^2 = -a^2$;

379. Aufgabe;

Eine Formel anzugeben, welche dienen soll jede Irrationalwurzel einer Zahl durch schnelle Näherung zu finden.

Diese soll nicht allein für alle Fälle des gewöhnlichen Wurzelausziehens verfahren, sondern auch noch dazu dienen selbst wenn man d. Logarithmen u. Wurzeln zu Hülfe nimmt, und die Wurzeln bis höchstens z. B. nur auf 6–7 Stellen finden, obgleich oft deren 12–14 zur Richtigkeit u. Genauigkeit d. Rechnung nöthig sind, noch eine bequeme Art diese Stellen zu finden. z. B. $\sqrt[2]{12} = 3{,}46 + x$ wo x ein echter Bruch u. zwar um so unbedeutender wird je weiter er vom Ganzen entfernt ist, dieses x soll man suchen. Es sey:

$$\sqrt[m]{a} = b+x \text{ d. i. ist } a=(b+x)^m = b^m + \frac{m}{1}b^{m-1}x + \frac{m.m-1}{1.2}b^{m-2}x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}b^{m-3}x^3 + \dots$$

$$+\frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}b^3x^{m-3} + \frac{m.m-1.\cancel{m-2}}{1.2}b^2x^{m-2} + \frac{m}{1}bx^{m-1} + x^m;\ /^*$$

Da nach der Voraussetzung x hier ein echter Bruch und zwar ~~ein~~ ~~klein~~ von geringem Werth ist, so erhellt

* Bei der Bestimmung der Coeff: beim binom von hinten ist wichtig das letzte Glied hat zum Coeff:

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots\dots 4.3.2.1}{1.2.3.4\dots\dots(m-3)(m-2)(m-1)m}$$

es heben sich also alle Glieder, der vorletzte Coeff: ist um den factor $\frac{1}{m}$ kleiner es heben sich also alle Glieder bis auf $\frac{m}{1}$ der drittletzte Coeff: ist um den factor $\frac{2.1}{(m-1).m}$ kleiner es heben sich also alle Glieder bis auf $\frac{m(m-1)}{1.2}$ u. s. f. so dass die Coeff der Glieder von hinten genau denen von vorne correspondiren, und ist die Zahl der Glieder gerade, in der Mitte 2 gleiche Coeff: erscheinen z. B. die 5te Potenz hat 6 Glieder die Coeff: sind 1, 5, 10, 10, 5, 1. die 6te 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. u. s. f.

daß die Glieder von x in Potenzen natürlich einen sehr unbedeutenden Werth zeigen müssen, deshalb kann man sie alle bis auf x^1 weglassen, und es giebt daher

$a = b^m + mb^{m-1}x$; u. $x = \frac{a-b^m}{mb^{m-1}}$ dieser Werth wäre nun schon ein Näherungswerth, wollte man ihn aber noch genauer wünschen, so nimmt man noch ein Glied des Binoms zu also hier noch:

$a = b^m + m.b^{m-1}x + \frac{m.m-1}{1.2}b^{m-2}x^2$.

Dies wäre nun eine unreine quadratische Gleichung, die als solche aufzulösen wäre aber ~~wäre~~ nicht vortheilhaft, weil dann bei der Auflösung abermals x in √ Ausziehung der bei vorigen Fall vorkommen würden. Daher muß man sie umformen, indem man x sucht:

$a - b^m = m.b^{m-1}x + \frac{m.m-1}{1.2}b^{m-2}x^2$;

$a - b^m = \left(mb^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}b^{m-2}x\right).x$, u. also:

φ — $x = \frac{a-b^m}{mb^{m-1}+\frac{m.m-1}{1.2}b^{m-2}x}$ für das x im Nenner setze man nun den ersten gefundenen Näherungswerth $x = \frac{a-b^m}{mb^{m-1}}$ so ist dies φ;

$$x = \frac{a-b^m}{mb^{m-1} + \frac{m.m-1}{1.2}b^{m-2} \times \frac{a-b^m}{mb^{m-1}}} = \frac{a-b^m}{mb^{m-1} + \frac{m-1.\,.(a-b^m)}{2b}} =$$

$$x = \frac{2b(a-b^m)}{2mb^m + (m-1).(a-b^m)} = \frac{2b(a-b^m)}{2mb^m + ma - a \cancel{-mb^m} + b^m} =$$

$$\underbrace{x = \frac{2b(a-b^m)}{(m+1)b^m + (m-1)a}} \text{; für } \sqrt[m]{a}$$

Setzt man nun für m Werthe so ist

für $\sqrt[2]{a}$;; $x = \frac{2b(a-b^2)}{3b^2+a} = \frac{2b(a-b^2)}{3b^2+a}$

— $\sqrt[3]{a}$; $x = \frac{b(a-b^3)}{2b^3+a} =$

für $\sqrt[4]{a}$; $x = \frac{2b(a-b^4)}{5b^4+3a}$

— $\sqrt[5]{a}$; $x = \frac{2b(a-b^5)}{6b^5+4a}$ u. s. w.

Wenn man nun nach dieser Formel rechnet, so kann man mit Gewißheit darauf rechnen, daß man wenigstens doppelt soviel richtige Ziffern erhält als vorher bekannt waren. So daß man z. B. bei einer Decimal Stelle sicher ist 2; bey 2 sicher 4, bei 3 sicher ist 6. bei 8 sicher ist 16 u. s. w. zu gewünschten kann; die neuen erhält man immer richtig, und zwar aus dem Grunde weil x^2 in d. [illegible] vorkommt z. B. 0,01 als einstellig angenommen giebt ihr Quadrat ±0,0001 als vierstellig u. s. w.

Anwendung

$$\sqrt[3]{35,000} = 3,3$$ (hier zu groß d. x wird daher negativ)

$$\begin{array}{l} 27 \\ \hline 8000 : 27 \\ 81 \\ \;\;81 \\ \;\;\;\;27 \\ \hline 8937 \end{array}$$

Formel $x = \frac{b(a-b^3)}{2b^3+a}$ für $\sqrt[3]{a}$.

daher $x = \frac{3,3(35-3,3^3)}{2.33^3+35}$ für $\sqrt[3]{35}$;

$$x = \frac{3,3(35-35,937)}{71,874+35} = \frac{-3,3 \times 0,937}{106,874} =$$

$x = -0,0287$.. dies von 3,3 abgezogen giebt $b+x = 3,2713$..... wobei man bedenkt dass 3,3 zu groß war daß man nicht 4 Ziff. zuletzt nehmen kann also hier 3,271;

Setzt man dies nun gleich b um das genauere x zu suchen so ist.

$$x = \frac{3,271(35-3,271^3)}{2 \times 3,271^3+35} = \frac{3,271(35-34,99787151)}{69,995743022+35}$$

$$= \frac{0{,}00696228751900}{104{,}993743022} = 0{,}00006631$$

daß zum obigen Werth von $b+x = 3{,}2713$ addirt giebt $3{,}27130663$ für $\sqrt[3]{35}$, welches man als genau genug richtig annehmen kann.

§80. Aufgabe.

Wenn man eine 2theilige √ Größe wie $\sqrt[n]{A}\pm\sqrt[n]{B}$ hat, wie kann man einen mehrtheiligen bestimmen, die wenn man sie mit ihr als Factor multiplicirt einen rationalen zweitheiligen Größe zum Produkt giebt? (vide hier Seite 136). ——. Ist also $\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}$ gegeben. Man erhebe $\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}$ zur $(n-1)^{\text{ten}}$ Potenz u. multiplicire (d. h. ohne Coefficienten) u. mit $\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}$, so wird das Product entweder $A+B$ oder $A-B$ je nachdem n eine ungerade od. gerade Zahl war. bei $\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}$ erhebe man dagegen $\sqrt[n]{A}+\sqrt[n]{B}$ zur $(n-1)^{\text{te}}$ Potenz und setze als 2^{te} Factor $\sqrt[n]{A}-\sqrt[n]{B}$.

Beispiele.

Es sey gegeben $\underline{\sqrt[5]{3a^3}-\sqrt[3]{2b}}$ = man solle sie rational machen durch einen 2ten Factor.

$$\sqrt[5]{3a^3} - \sqrt[5]{2b} = \left(\sqrt[5]{3a^3} - \sqrt[5]{2b}\right) \cdot \left(\sqrt[5]{3a^3} + \sqrt[5]{2b}\right)^4;$$

$$\left(\sqrt[5]{3a^3} + \sqrt[5]{2b}\right)^4 = \left((3a^3)^{\frac{1}{5}} + (2b)^{\frac{1}{5}}\right)^4 = P^m + AQ + BQ + CQ + \dots$$

Hier ist $P = (3a^3)^{\frac{1}{5}}$; $m = 4$ und $Q = \frac{(2b)^{\frac{1}{5}}}{(3a^3)^{\frac{1}{5}}}$; es ist also:

$$P^m = \left((3a^3)^{\frac{1}{5}}\right)^4 = (3a^3)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(3a^3)^4} = A$$

$$AQ = (3a^3)^{\frac{4}{5}} \times \frac{(2b)^{\frac{1}{5}}}{(3a^3)^{\frac{1}{5}}} = (3a^3)^{\frac{3}{5}} \times (2b)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{(3a^3)^3 \cdot 2b} = B.$$

$$BQ = \left((3a^3)^{\frac{3}{5}} \times (2b)^{\frac{1}{5}}\right) \times \frac{(2b)^{\frac{1}{5}}}{(3a^3)^{\frac{1}{5}}} = (3a^3)^{\frac{2}{5}} \cdot (2b)^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{(3a^3)^2 \cdot (2b)^2} = C$$

$$CQ = (3a^3)^{\frac{2}{5}} \cdot (2b)^{\frac{2}{5}} \times \frac{(2b)^{\frac{1}{5}}}{(3a^3)^{\frac{1}{5}}} = (3a^3)^{\frac{1}{5}} \cdot (2b)^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{(3a^3)(2b)^3} = D.$$

$$DQ = (3a^3)^{\frac{1}{5}} \cdot (2b)^{\frac{3}{5}} \times \frac{(2b)^{\frac{1}{5}}}{(3a^3)^{\frac{1}{5}}} = (2b)^{\frac{4}{5}} = \sqrt[5]{(2b)^4} = E;$$

Hier stellt nun E. die Potenzirung des [illegible] $n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3$?? $= 0$ vor, welches man an den Coeffizienten sieht, daher kann man hier nur daraus ziehen ob man genau potenzirt hat wenn der [illegible] [illegible] den Exponent A° erscheint, als erfüllt. der 2te Factor würde also die hier gefundenen Glieder A, B, C, D, E zeigen. Multiplicirt man wirklich so ist:

$$\frac{\sqrt[5]{(3a^3)^4} + \sqrt[5]{(3a^3)^3 \cdot 2b} + \sqrt[5]{(3a^3)^2 \cdot 2b^2} + \sqrt[5]{(3a^3)(2b)^3} + \sqrt[5]{2b^4};}{\sqrt[5]{(3a^3)} - \sqrt[5]{2b}}$$

$=$

$$\sqrt[5]{(3a^3)^5} + \sqrt[5]{(3a^3)^4\cdot 2b} + \sqrt[5]{(3a^3)^3(2b)^2} + \sqrt[5]{(3a^3)^2(2b)^3} + \sqrt[5]{(3a^3)(2b)^4}$$

$$- \sqrt[5]{(3a^3)^4\cdot 2b} - \sqrt[5]{(3a^3)^3\cdot(2b)^2} - \sqrt[5]{(3a^3)^2\cdot(2b)^3} - \sqrt[5]{(3a^3)\cdot(2b)^4} - \sqrt[5]{(2b)^5};$$

$$= \underline{3a^3 - 2b}$$

Also:

$$\left(\sqrt[5]{3a^3} - \sqrt[5]{2b}\right)\cdot\left(\overset{\sqrt[5]{(3a^3)^4}+}{\sqrt[5]{(3a^3)^3\cdot 2b}} + \sqrt[5]{(3a^3)^2(2b)^2} + \sqrt[5]{(3a^3)(2b)^3} + \sqrt[5]{(2b)^4}\right) = 3a^3 - 2b.$$

$$\left(\sqrt[5]{3a^3} - \sqrt[5]{2b}\right)\cdot\left(a^2\sqrt[5]{81a^2} + a\sqrt[5]{54a^4b} + a\sqrt[5]{36ab^2} + \sqrt[5]{24a^3b^3} + \sqrt[5]{16b^4}\right) = 3a^3 - 2b;$$

Seite 180 u. 181 desgl. Nachsehen die 1te u. 2te Zusatz:

Haben die gegebenen √Größen Coefficienten so bringe man diese erst unter das √Zeichen; haben sie ungleiche √Exponenten so mache man sie erst = namig:

Beides wird in untenstehendem Beispiel gezeigt:

Es ist rational zu machen $a\sqrt[3]{b^2} - 2b\sqrt{a}$:

$$a\sqrt[3]{b^2} - 2b\sqrt{a} = ab^{\frac{2}{3}} - 2ba^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{3}{3}}b^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{2}}a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{2}} = a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}} - 2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}} =$$

$\sqrt[6]{a^6b^4} - \sqrt[6]{2^6b^6a^3}$; man muß also die 5te Potenz in Hinsicht der [illegible] Produkte machen, und zwar von $\sqrt[6]{a^6b^4} + \sqrt[6]{2^6b^6a^3}$;

Bei der 5te [illegible] also von.

$$\left(\sqrt[6]{a^6b^4} + \sqrt[6]{2^6b^6a^3}\right)^5 = \left(a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}} + 2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}}\right)^5 \text{ ist nach}$$

$$P^m + AQ + BQ + CQ + \ldots\ldots \quad P =$$

$$D = a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}}; \quad Q = \frac{2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}}}$$ und $m = 5$.

Q nicht abzuändern ist hier in d. Anhang vorzüglich festen. Es ist daher:

$$D^m = (a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}})^5 = A$$

$$AQ = (a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}})^5 \cdot \frac{2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}}} = (a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}})^4 \cdot 2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}} = B$$

$$BQ = (a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}})^4 (2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}}) \cdot \frac{2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}}} = (a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}})^3 (2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}})^2 = C$$

$$CQ = (a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}})^3 (2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}})^2 \times \frac{2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}}} = (a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}})^2 (2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}})^3 = D$$

$$DQ = (a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}})^2 (2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}})^3 \times \frac{2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}}} = (a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}})(2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}})^4 = E$$

$$EQ = (a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}})(2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}})^4 \cdot \frac{2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}}}{a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}}} = (2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}})^5 = F.$$

Multiplicirt man nun $(A + B + C + D + E + F)$ mit $a^{\frac{6}{6}}b^{\frac{4}{6}} - 2^{\frac{6}{6}}b^{\frac{6}{6}}a^{\frac{3}{6}}$; so erhält man den Ausdruck $\underline{a^6b^4 - 2^6b^6a^3}$ als einen rationalen Ausdruck und es gibt also:

$$(a\sqrt[3]{b^2} - 2b\sqrt{a}) \cdot \left(\begin{array}{l} a^5b^3\sqrt[3]{b} + 2a^4b^3\sqrt[6]{a^3b^4} + 4a^4b^4 + 8a^3b^4\sqrt[6]{a^3b^2} + \\ + 16a^3b^4\sqrt[3]{b^2} + 32a^2b^5\sqrt{a} \end{array}\right) =$$

$$= \underline{a^6b^4 - 2^6b^6a^3};$$

Der 3te Zusatz enthält nichts als eine Wiederholung des schon gesagten.

Wenn nämlich ein Bruch gegeben ist, wo im Nenner eine 2theilige irrationale Größe vorkömmt, und man soll den Nenner zur Bequemlichkeit der Rechnung rational machen, so wird man wie oben gezeigt ist verfahren und wird darauf

(Man sehe hier [illegible] meinen 10ten Aufs. v. d. Divis. d. √Größen ——).

z. B. $\dfrac{c-ad}{a\sqrt[3]{b^2}-2b\sqrt{a}}$ = seyn.

$$\frac{(c-ad)\cdot\left(a^5b^3\sqrt[3]{b}+2a^4b^3\sqrt[6]{a^3b^4}+4a^4b^4+8a^3b^4\sqrt[6]{a^3b^2}+16a^3b^4\sqrt[3]{b^2}+32a^2b^5\sqrt{a}\right)}{a^6b^4-2^6b^6a^3};$$

VIII Abschnitt.

Allgemeiner Beweis des binomischen Lehrsatzes,
und Anwendung derselben Beweisart
auf die Erfindung der unbestimmten
Potenz jeder ohne Ende fortgesetzten
Funktion; $1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\ldots\ldots$

Dieser Abschnitt enthält die Gründe, warum wir ein Binom so behandeln konnten (Abschnitt 7) als wir es thaten; d. h. nicht allein bey Po-

Erhebung in eine + Dignität, sondern auch bey jeder Dignitäts-Erhebung.

Bis damals leiteten wir einen ganzen + Exponent des Gesetzes der unvollständigen Induction (mit den 5 ersten Gliedern) ab. Daraus erlaubten wir es auch anzunehmen und für ganze + Exponent gelten, auch für − u. Bruch Exponenten angenommen indem wir ~~setzten~~ m sey $= -n \pm \frac{u}{v}$ etc., analog schließen. Jetzt soll die Richtigkeit dieser Annahme bewiesen werden.

Dieser Beweis ist eigentlich von Euler zuerst geführt worden, aber durch Hülfe der Diff: Rechnung; und hierin liegt gerade die Kürze des Schl. des er die Differential Sprache in rein analytische Sprache übersetzt hat, und dies macht diesen Beweis so vortrefflich.

Eine Function exponentieren heißt jedes Glied derselben mit dem davon vorkommenden Exponent der veränderlichen Größe multipliciren.

Soll also eine $F.\,\underset{\wedge}{Z}. = a + bc + dx^m + ex^n + fx^p + \ldots\ldots$

exponentiirt werden, so ~~stellt~~ ist sie =

$ax^0 + bcx^0 + dx^m + ex^n + fx^p + \ldots\ldots =$

$= 0.ax^0 + 0.bcx^0 + mdx^m + nex^n + pfx^p + \ldots\ldots$

die Änderung wird angezeigt durch $\underline{E}.$ welches man vor die zu exponentiirende Funktion schreibt; also:

$E.Z =$ die Exponentiale von der gegebenen Funktion und da in [illegible] in den ersten 2 Gliedern $\underline{0}$, Faktor ist so fallen sie weg und es ist daher.

$E.Z = mdx^m + nex^n + pfx^p + \ldots$

die Exponentiale kommt hier auch noch ein kleines $\underline{e}$, nur den Unterschied daß er dort statt dem großen E stehet, wenn die Exponentiale einer höhern Dignität einer Funktion genommen werden soll z.B. $(a + ax + ax^2 + \ldots)^4$. E von dieser Exponentiale steht er $e.(a + ax + ax^2 + \ldots)$

Wir wollen aber nur immer das große $\underline{E}$ brauchen; zur Deutlichkeit aber immer es auch einen Punkt von der zu exponentiirenden Größe

Lemma.

Zuſatz.

Das Differential einer gegebenen Funktion z^m; alſo $\mathcal{E}z^m = m.z^{m-1}.\mathcal{E}.z$; und ſoll nun bewieſen werden; für einen ſpeciellen Fall alſo wäre $\mathcal{E}.(4-8x+6x^2)^3 = 3(4-8x+6x^2)^2 . \mathcal{E}.(4-8x+6x^2)$.

Der Gang des Beweiſes iſt der, daß die ~~Richtig~~ die Richtigkeit des Satzes vom Quadrate im §81 bewieſen und im §82 das allgemeine; indem er folgt: $\mathcal{E}.z^2 = 2z.\mathcal{E}.z$, wo z eine beliebige Anzahl Glieder haben kann als $z = \alpha + ax^m + bx^n + cx^p + \dots kx^s + lx^t$.

Er zeigt die Richtigkeit dieſes untergeordneten Satzes indem er zeigt erſt für $z = \alpha + ax^m$ dann $z = x + a\alpha^m + bx^n$ dann $z = (x + ax^m + \dots$

Gut iſt es immer wenn man bey jeder Behauptung die Anwendung in einem Beiſpiele ſieht, denn hat man mehr Ueberzeugung vom allgem

(Differenzialrechn. $d.z^m = mz^{m-1}.dz$.)

Beweis iſt $z = \alpha + ax^m$, ſo iſt

$$z^2 = \alpha^2 + 2\alpha a x^m + a^2x^{2m}$$
$$\mathcal{E}z = max^m$$
$$\mathcal{E}z^2 = 2m\alpha a x^m + 2ma^2x^{2m}$$
$$= (2\alpha + 2ax^m)max^m$$
$$= 2z.\mathcal{E}z$$

iſt $z = (\alpha + ax^m + bx^n)$

$$\mathcal{E}z = max^m + nbx^n$$
$$z^2 = (\alpha + ax^m)^2 + 2(\alpha + ax^m)bx^n + b^2x^{2n}$$
$$\mathcal{E}.z^2 = \mathcal{E}.A + \mathcal{E}.B + \mathcal{E}.C$$
$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{E}.A &= (2\alpha + 2ax^m)max^m \\ \mathcal{E}.B &= 2\alpha bnx^n + 2ab(m+n)x^{m+n} \\ &= 2\alpha bnx^n + 2abmx^{m+n} + 2abnx^{m+n} \\ \mathcal{E}.C &= 2nb^2x^{2n} \end{aligned}\right.$$
$$\mathcal{E}z^2 = (2\alpha + 2ax^m + 2bx^n)amx^m + (2\alpha + 2ax^m + 2bx^n)bnx^n$$
$$\mathcal{E}z^2 = (2\alpha + 2ax^m + 2bx^n)(amx^m + bnx^n)$$
$$\mathcal{E}z^2 = 2z.\mathcal{E}z$$

cf p. 150.

wodurch Beweis ſynthetiſch geführt wird

und dieſes ſoll es erſt an einem ſpeziellen Falle gezeigt werden. — Gleichgültig iſt es übrigens, ob die welchen Dignitaeten von x die Funktion ſteigt.

Es ſey alſo $Z^n = (3+4x^2-2x^5)^4$; und alſo

$$\mathfrak{E}.(3+4x^2-2x^5)^4 = 4(3+4x^2-2x^5)^3 \times \mathfrak{E}.(3+4x^2-2x^5) \quad \varphi.$$

Erhebt man nun die Funktion von $(3+4x^2-2x^5)$ in den Cubus 3 und Biquadrat ſo iſt

$$(3+4x^2-2x^5)^3 = 27+108x^2+144x^4-54x^5+64x^6-144x^7-96x^9+36x^{10}+48x^{12}-8x^{15}; = \mathfrak{Cu}.$$

und

$$(3+4x^2-2x^5)^4 = 81+432x^2+864x^4-216x^5+768x^6-914x^7+256x^8-1152x^9+216x^{10}-$$
$$-512x^{11}+576x^{12}+384x^{14}-96x^{15}-128x^{17}+16x^{20}; \quad = \mathfrak{B}.$$

Multipliciren wir nun in d. Grundgleichung φ $(3+4x^2-2x^5)^3 = \mathfrak{Cu}.$ mit 4, ſo iſt.

$$(3+4x^2-2x^5)^3.4 = 108+432x^2+576x^4-216x^5+256x^6-576x^7-384x^9+144x^{10}+192x^{12}-32x^{15}; = \mathfrak{C}$$

$\mathfrak{E}.(3+4x^2-2x^5) = 8x^2-10x^5$, das mit $\mathfrak{C}$, multiplicirt wie es in φ geordert wird giebt:

$$4(3+4x^2-2x^5)^3 \times \mathfrak{E}.(3+4x^2-2x^5) = 864x^2+3456x^4-1080x^5+4608x^6-6048x^7$$
$$+2048x^8-10368x^9+2160x^{10}+5632x^{11}+6912x^{12}+5376x^{14}-1440x^{15}-2176x^{17}+320x^{20};$$

und muß nun gleich ſeyn dem $\mathfrak{E}.(\mathfrak{B}) = \mathfrak{E}.(3+4x^2-2x^5)^4$.

Sucht man wirklich das $\mathfrak{E}.$ von $\mathfrak{B}$ ſo wird man dasselbe Resultat erhalten.

Jetzt könnte man nun schon einen Beweis ahnen, der aber für uns [illegible] hinaus und wäre

die Vorschrift geht nun wie schon gesagt nach ein Quadrat aus, und braucht dann das vollständige Induction, daß das Gesetz wenn es für m Größen wahr ist, auch für $(m+1)$ Größen gilt, mithin allgemein wahr ist.

Es soll also bewiesen werden:

daß $\underline{E.\underset{\sim}{z}^2 = 2\underset{\sim}{z}\,E.\underset{\sim}{z}}$. wo

$$\underset{\sim}{z} = (\alpha + ax^m + bx^n + cx^p + \ldots kx^s + lx^t).$$

Die Vorschrift nimmt nun für $\underset{\sim}{z}$ die beiden ersten Glieder dieser Function dann 3 Glieder. Es ist also für:

$$\underset{\sim}{z} = \alpha + ax^m$$

$$E.(\alpha+ax^m)^2 = 2(\alpha+ax^m).\,E.(\alpha+ax^m);$$

$$E.(\alpha+ax^m)^2 = E(\alpha^2 + 2\alpha ax^m + a^2x^{2m}) = 0.\alpha^2 + 2m\alpha ax^m + 2ma^2x^{2m}.$$

$$= 2m\alpha ax^m + 2ma^2x^{2m}.$$

der 2te Theil der Gleichung:

$$2(\alpha+ax^m).\,E.(\alpha+ax^m) = 2\alpha + 2ax^m \times (0.\alpha + max^m) = 2m\alpha ax^m + 2ma^2x^{2m}$$

welches aber auch der erste Theil der Gleichung geb. —

da $\underbrace{Z = \alpha + ax^m + bx^n}$ ist

$$\mathcal{E}.(\alpha + ax^m + bx^n)^2 = 2(\alpha + ax^m + bx^n) \cdot \mathcal{E}.(\alpha + ax^m + bx^n)$$

der erste Theil d. Gleichung.

$$\mathcal{E}.(\alpha + ax^m + bx^n)^2 = \mathcal{E}.(\alpha^2 + 2\alpha a x^m + a^2 x^{2m} + 2abx^{m+n} + b^2 x^{2n} + 2\alpha b x^n) =$$

$$= 0.\alpha^2 + 2m\alpha a x^m + 2m a^2 x^{2m} + 2n\alpha b x^n + 2(m+n)abx^{m+n} + 2nb^2 x^{2n}$$

der 2te Theil der Gleichung

$$2(\alpha + ax^m + bx^n) \cdot \mathcal{E}.(\alpha + ax^m + bx^n) = (2\alpha + 2ax^m + 2bx^n) \cdot (0.\alpha + max^m + nbx^n) =$$

$$= 2m\alpha a x^m + 2m a^2 x^{2m} + 2mabx^{m+n} + 2n\alpha b x^n + 2nabx^{m+n} + 2nb^2 x^{2n} =$$

$$= 2m\alpha a x^m + 2m a^2 x^{2m} + 2n\alpha b x^n + 2(m+n)abx^{m+n} + 2nb^2 x^{2n};$$

welches auch der 1te Theil der Gleichung gab.

Jetzt könnte man nun schon wieder durch unvollständige Induction die Richtigkeit der Behauptung des Satzes beweisen, allein der Vorsichtiger. schließt man allgemein für die r gliedrige Function, d. h. zeigt man ob das was von r gliedrigen Function gilt, auch von der $(r+1)$ Gliedrigen Function statt findet.

Daher nimmt man in oben genannten Function $Z = (\alpha + ax^m + bx^n + \ldots\ kx^s + lx^t)$ die ersten

152.

Gleiche. $\alpha + ax^m + bx^n + \ldots\ldots Kx^5 = A.$

und $\underset{\frown}{Z} = A + lx^t.$

so wäre hiernach.

$$\mathcal{E}\,\underset{\frown}{Z}^2 = 2(A+lx^t)\cdot\mathcal{E}(A+lx^t) = \mathcal{E}\cdot(A+lx^t)^2.$$

der erste Theil der Gleichung.

$$\mathcal{E}\cdot(A+lx^t)^2 = \mathcal{E}(A^2+2Alx^t+l^2x^{2t}) = \underline{\mathcal{E}A^2+\mathcal{E}\cdot2Alx^t+\mathcal{E}\cdot l^2x^{2t}};\ldots$$

Entwickelt man nun hier die Werthe für A^2 u. A so ist also:

$$\mathcal{E}A^2 = \mathcal{E}(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots\ldots Kx^5)^2 = 2(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots\ldots Kx^5)\cdot\mathcal{E}(\alpha+ax^m+\ldots Kx^5)$$

dies wird als bekannt [illegible] unter andern Form eben bewiesen werden soll.

die Exponenten wirklich genommen, so ist:

$$\mathcal{E}A^2 = 2(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots\ldots Kx^5)\cdot(0\cdot\alpha+max^m+nbx^n+\ldots\ldots 5Kx^5);$$

des Exponenten:

$$\mathcal{E}\cdot2Alx^t = \mathcal{E}\cdot2lx^t(\alpha+ax^m+bx^n+\ldots Kx^5).$$ bringt man das Uebrige hier wegen x^t in die Parenthese so ist.

$$\mathcal{E}\cdot2Alx^t = \mathcal{E}\cdot2l(\alpha x^{0+t}+ax^{m+t}+bx^{n+t}+\ldots\ldots Kx^{5+t})$$ und

$$\mathcal{E}\cdot2Alx^t = 2l\left[(0+t)\alpha x^{0+t}+(m+t)ax^{m+t}+(n+t)bx^{n+t}+\ldots\ldots(5+t)Kx^{5+t}\right]$$

$$\mathcal{E}\cdot2Alx^t = 2l(0\cdot\alpha x^{0+t}+t\alpha x^{0+t}+max^{m+t}+tax^{m+t}+nbx^{n+t}+tbx^{n+t}+\ldots 5Kx^{5+t}+tKx^{5+t})$$

weil x^t wird eben in die Parenthese gebracht

Vollkommen ist durch die Bemerkung [illegible] sehr weit und schon würde. Setzte man [illegible] daß der Satz für r Glieder gilt, was er wieder bewiesen ist:
[illegible] also aus $r=2$
Mal kürzer und deutl. ist der analytische Beweis von mir p. 154.

$$E.\ 2Alx^t = 2lx^t(0\alpha x^0 + t\alpha x^0 + max^m + tax^n + nbx^n + tbx^n + \ldots 5Kx^5 + tKx^5)$$

Nach den Gliedern mit und ohne t geordnet.

ist:

$$E.\ 2Alx^t = 2lx^t\left(\begin{matrix} 0.\alpha x^0 + max^m + nbx^n + \ldots + 5Kx^5 \\ t\alpha x^0 + tax^m + tbx^n + \ldots + tKx^5 \end{matrix}\right)$$

$$E.\ 2Alx^t = 2lx^t\left[(0\alpha x^0 + max^m + nbx^n + \ldots 5Kx^5) + t(\alpha x^0 + ax^m + bx^n + \ldots Kx^5)\right] =$$

= dem Differenzial des 2ten Gliedes in der Gleichung ✗.

Das Differenzial des 3ten Gliedes in ✗.

$$E.\ l^2x^{2t} = 2tl^2x^{2t} = 2tlx^t \times lx^t;$$

Diese 3 entwickelten Werthe der Gleichung ✗

in zusammengesetzt gestellt:

$$E.\ (A + lx^t)^2 = 2(\alpha + ax^m + bx^n + \ldots Kx^5).(0\alpha + max^m + nbx^n + \ldots 5Kx^5) +$$
$$+ 2lx^t(0\alpha + max^m + nbx^n + \ldots 5Kx^5) + 2tlx^t(\alpha + ax^m + bx^n + \ldots Kx^5)$$
$$+ 2tlx^t \times lx^t;$$

Das ist nun, da A = r Glieder war, das

Differenziale von einer (r+1) gliedrigen Funktion

da noch das Glied lx^t dazu gekommen war.

Zur bequemern Uebersicht sey in obiger Gleichung:

$$(\alpha + ax^m + bx^n + \ldots Kx^5) = \underline{B}$$

$$(0\alpha + max^m + nbx^n + \ldots 5Kx^5) = \underline{C}$$ so ist:

$$E.\ (A + lx^t)^2 = 2BC + 2lx^tC + 2tlx^tB + 2ltx^t.lx^t; =$$

$$2C(B + lx^t) + 2tlx^t(B + lx^t) = \underline{2(B + lx^t).(C + tlx^t)};$$

allgem. Beweis $Z = \alpha + ax^m + bx^n + \dots\dots px^o = A + px^o$ | $A = \alpha + ax^m + bx^n + \dots\dots$

$\mathcal{E}A = amx^m + bnx^n + \dots$

$$Z^2 = (A + px^o)^2 = A^2 + 2Apx^o + p^2x^{2o}$$
$$\mathcal{E}Z^2 = \mathcal{E}A^2 + \mathcal{E}.2Apx^o + \mathcal{E}.p^2x^{2o}$$
$$\mathcal{E}Z^2 = 2A.\mathcal{E}A + 2px^oAo + 2px^o\mathcal{E}A + 2op^2x^{2o}$$
$$\mathcal{E}Z^2 = (2A + 2px^o)\mathcal{E}A + (2A + 2px)opx^o$$
$$\mathcal{E}Z^2 = (2A + 2px^o)(\mathcal{E}A + opx^o)$$
$$\mathcal{E}Z^2 = \underbrace{2Z.\mathcal{E}Z}$$

$\mathcal{E}A^2 = 2A.\mathcal{E}A$ [A^2 wie einfachen Buchst. anzusehen)

$$\mathcal{E}.p^2x^{2o} = 2op^2x^{2o}$$
$$\mathcal{E}.2Apx^o = \mathcal{E}\,2(\alpha + ax^m + bx^n + \dots)px^o$$
$$= \mathcal{E}\,2(\alpha px^o + apx^{o+m} + bpx^{o+n} + \dots)$$
$$= 2(\alpha opx^o + (o+m)apx^{o+m} + (o+n)bpx^{o+n} + \dots)$$
$$= 2px^o(\alpha o + (o+m)ax^m + (o+n)bx^n + \dots)$$
$$= 2px^o(\alpha o + aox^m + amx^m + obx^n + nbx^n + \dots)$$
$$= 2px^o[(\alpha + ax^m + bx^n)o + (amx^m + nbx^n + \dots)]$$
$$= 2px^o(Ao + \mathcal{E}A)$$
$$= 2px^oAo + 2px^o\mathcal{E}A.$$

Setzt man nun für A, so wie für die übrigen angenommenen Buchstaben B u. C ihre Werthe so erhält ein Gleichung F:

$$\mathcal{E}\left[\left(\alpha + ax^m + bx^n + \dots Kx^s\right) + lx^t\right]^2 = 2\left[\left(\alpha + ax^m + bx^n + \dots Kx^s\right) + lx^t\right]\cdot\left[\left(o\alpha + max^m + nax^n + sKx^s\right) + tlx^t\right]$$

dieses Gesetz hat wir nun früher nur für die 2, 3 und r gliedrigen Funktionen entwickelt finden wir, nun auch hier an der $(r+1)$ gliedrigen bestätigt, da für die r gliedrigen Funktionen nahm man die Factoren 2 mal und X zieht ab t den Exponentiale :: Wegen dies ist auch hier der Fall, und es bleibt nur noch zu beweisen, daß das was hier vom Quadrate gilt, auch für jeden unbestimmten Exponenten m und dann für $(m+1)$ gilt.

Seite 189. Zusatz I.

Wenn X und Z, zwey Funktionen von einerley Grad sind, so ist sowohl ihre Summe als ihre Differenz also $(X+Z)$ u $(X-Z)$ eine Funktion von einerley Grad, und also ist auch $\mathcal{E}.(X+Z)^2 = 2(X+Z)\times\mathcal{E}.(X+Z)$ und

$$E.(X-Z)^2 = 2(X-Z) \times E.(X-Z);$$

denn es sei:

$$Z = 1 + \alpha x^m + \beta x^n + \gamma x^p + \ldots$$

$$X = 3 + a x^m + b x^n + c x^p + \ldots$$

so ist $(Z + X) = (3+1) + (\alpha + a)x^m + (\beta + b)x^n + (\gamma + c)x^p + \ldots$

und $(X - Z) = (3-1) + (a-\alpha)x^m + (b-\beta)x^n + (c-\gamma)x^p + \ldots$

also Functionen von derselben Form.

Daher ist obengesagte richtig.

Zusatz 2.

Wenn man die Exponentiale der Summe (algebraische Summe d.i. $a+b$ oder $(a-b)$) nehmen will, so ist es gleichgültig ob ich die Exponentiale der einzelnen Functionen nehme und dann addire, oder ob ich gleich die Exponentiale der Summe nehme.

Denn indem ich ~~nach~~ exponentiiren multiplicire ich ja mit den Exponenten die doch hier gleich ~~wenig~~ sind in ihren gleichnamigen Gliedern, die Coefficienten der Functionen. X erscheint also in beiden Fällen bei den Coefficienten der Function, daher:

156

$$\mathcal{E}.X = max^m + nbx^n + pcx^p$$

$$\mathcal{E}.Z = m\alpha x^m + n\beta x^n + p\gamma x^p$$

$\mathcal{E}.X + \mathcal{E}.Z = m(a+\alpha)x^m + n(b+\beta)x^n + p(c+\gamma)x^p$ und

aber so ist das

$$\mathcal{E}(X+Z) = m(a+\alpha)x^m + n(b+\beta)x^n + p(c+\gamma)x^p;$$

Zusatz 3.

Aus dem vorigen Zusatz leitet man d. Vgl. diese Regel ab für das Product zwo gleichartigen Functionen: nämlich:

$\mathcal{E}.(X+Y)^2 = 2(X+Y).\,\mathcal{E}(X+Y) = 2(X+Y).(\mathcal{E}X + \mathcal{E}.Y)$; verrichtet man die Multiplication wirklich so ist:

$\mathcal{E}.(X+Y)^2 = 2X\mathcal{E}.X + 2X\mathcal{E}.Y + 2Y\mathcal{E}.X + 2Y\mathcal{E}.Y$; ――――― $\mathfrak{A}$.

Es ist ferner:

$$\mathcal{E}.(X-Y)^2 = 2(X-Y)\times\mathcal{E}.(X-Y) = 2(X-Y)\times(\mathcal{E}X - \mathcal{E}Y)$$

verrichtet man auch hier d. Multiplication so ist.

$\mathcal{E}(X-Y)^2 = 2X\mathcal{E}.X - 2Y\mathcal{E}.X - 2X\mathcal{E}.Y + 2Y.\mathcal{E}.Y$; ――――― $\mathfrak{B}$.

Nun ist aber auch.

$(X+Y)^2 - (X-Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2 - X^2 + 2XY - Y^2 = 4XY$ also ist:

$XY = \frac{1}{4}(X+Y)^2 - \frac{1}{4}(X-Y)^2$ und: $\mathcal{E}.XY = \frac{1}{4}\mathcal{E}.(X+Y)^2 - \frac{1}{4}\mathcal{E}.(X-Y)^2$

und $4\mathcal{E}.XY = \mathcal{E}.(X+Y)^2 - \mathcal{E}(X-Y)^2$ ――――― $\mathfrak{C}$.

die Funktionen $\mathcal{E}x$ u. $\mathcal{E}y$ substituirt.

$$\mathcal{E}(X+Y)^2 = 2X\mathcal{E}.X + 2X\mathcal{E}.Y + 2Y\mathcal{E}.X + 2Y\mathcal{E}.Y$$

$$\pm\mathcal{E}(X-Y)^2 = \pm 2X\mathcal{E}.X \mp 2Y\mathcal{E}.X \mp 2X\mathcal{E}.Y \pm 2Y\mathcal{E}.Y$$

$$\mathcal{E}.(X+Y)^2 - \mathcal{E}(X-Y)^2 = 4.\mathcal{E}.XY = 4Y\mathcal{E}.X + 4X\mathcal{E}.Y \text{ und } \underline{2^o}.$$

also:

$$\underline{\mathcal{E}.XY = Y.\mathcal{E}.X + X\mathcal{E}.Y}.$$ (Differzl. $duv = udv + vdu$)

Wenn also eine Funktion eines Produktes bestimmt werden soll, so multiplicirt man jede Funktion gegenseitig mit dem Exponentiale der anderen, und addirt diese Produkte.

Diese Regel wird in d. Folge zum Beweise d. Binoms gleich angewendet werden, jetzt muß nur nachgewiesen werden daß:

§.82. Lehrsatz

$\mathcal{E}.z^m = m.z^{m-1} \times \mathcal{E}.z$ ist wo z irgend eine Funktion bedeutet.

Beweis. Wir nehmen vorläufig an d. Satz habe seine Richtigkeit für eine gewisse Ziffer n und trachte es dann die $(n+1)$ stelle so kann m nun noch so grosse Zahl steigen, weil wir

Quadrate es gilt. Setzen wir daher $n = 2$ so ist $(n+1) = 3$ u. s. w. wenn es für $(n+1)$ auch gilt.

Wir nehmen also an es gilt für eine Dignität n wahr zu seyn:

$E.z^n = n z^{n-1} . E.z$ und suchen dann ob es auch $E.z^{n+1} = (n+1) z^n . E.z$ sey.

$z^{n+1} = z^n . z$ daher.

$E.z^{n+1} = E.z^n . z$ hier die Regel vom Produkt angewandt:

$E.z^{n+1} = z E.z^n + z^n E.z$; für $E.z^n$ die Exponentiale genommen, gibt:

$E.z^{n+1} = z . n z^{n-1} \times E z + z^n E.z$;

$E.z^{n+1} = n z^{n-1+1} \times E z + z^n E.z = n z^n . E z + z^n E.z$. daher

$E z^{n+1} = z^n E.z (n+1)$ und hieraus schließen wir nun daß da es vom Quadrat wahr ist, es auch für jede ganze + und so weiter Potenz gilt.

2) Sey $m = +\frac{u}{v}$.

so muß also seyn:

$E.z^{\frac{u}{v}} = \frac{u}{v} z^{\frac{u}{v}-1} \times E.z$.

Um dieß zu beweisen setze man $z^{\frac{u}{v}} = y$ und da u u. v beide positive Zahlen sind so ist auch $y^v = z^u$ und $\mathcal{E}.y^v = \mathcal{E}.z^u$. das Differential genommen so ist

denn $z^{\frac{u}{v}} = y$

$\sqrt[v]{z^u} = y$ $\left(\sqrt[v]{z^u}\right)^v = y^v$

$z^u = y^v$

$$v y^{v-1} . \mathcal{E}.y = u z^{u-1} \times \mathcal{E}.z$$

$$\mathcal{E}.y = \frac{u z^{u-1} . \mathcal{E}.z}{v y^{v-1}} \text{ ------------ } \alpha$$

Es war angenommen $y = z^{\frac{u}{v}}$

$$y^v = z^u$$

$$\frac{y^v}{y} = \frac{z^u}{z^{\frac{u}{v}}}$$

$$y^{v-1} = z^{u-\frac{u}{v}}$$ diesen Werth in α

für y^{v-1} gesetzt. so gibt.

$$\mathcal{E}.y = \frac{u\, z^{u-1} . \mathcal{E}.z.}{v z^{u-\frac{u}{v}}}$$

$$\mathcal{E}.y = \frac{u}{v} z^{u-1-u+\frac{u}{v}} \times \mathcal{E}.z = \frac{u}{v} z^{\frac{u}{v}-1} . \mathcal{E}.z.$$

und endlich $\mathcal{E}\, z^{\frac{u}{v}} = \frac{u}{v} z^{\frac{u}{v}-1} \times \mathcal{E}.z$ q.d. demonstrat-

Nun haben wir also die Richtigkeit für ganze + und gebrochene Zahlen bewiesen. Wir dürfen also nur noch für − Zahlen beweisen und dann gehen die − gebrochenen Exponenten als bewiesen annehmen indem für $-n = -\frac{u}{v}$, ...

kann.

~~Viel einfacher ist der Beweis~~

$$\cancel{\mathcal{E}Z^{-n} = \mathcal{E}\left(\frac{1}{Z^n}\right) = \frac{1}{\mathcal{E}.Z^n} = \frac{1}{nZ^{n-1}\cdot\mathcal{E}Z} = -nZ^{-}}$$

3) Ist endlich $m = -n$ so ist

Th: $\mathcal{E}.Z^{-n} = -nZ^{-n-1} \times \mathcal{E}.Z$

Es ist aber.

$$Z^{2n}\cdot Z^{-n} = Z^{n}$$

$$\mathcal{E}Z^{2n}\cdot Z^{-n} = \mathcal{E}.Z^{n}$$

$$Z^{2n}\cdot\mathcal{E}.Z^{-n} + Z^{-n}\cdot\mathcal{E}.Z^{2n} = nZ^{n-1}\times\mathcal{E}.Z$$

$$Z^{2n}\cdot\mathcal{E}.Z^{-n} + Z^{-n}\cdot 2nZ^{2n-1}\cdot\mathcal{E}.Z = nZ^{n-1}\cdot\mathcal{E}.Z$$

$$Z^{2n}\cdot\mathcal{E}.Z^{-n} = nZ^{n-1}\cdot\mathcal{E}.Z - Z^{-n}\cdot 2nZ^{2n-1}\cdot\mathcal{E}Z \quad \varphi$$

$$Z^{2n}\times\mathcal{E}.Z^{-n} = nZ^{n-1}\cdot\mathcal{E}.Z - 2nZ^{n-1}\,\mathcal{E}.Z$$

$$Z^{2n}\times\mathcal{E}.Z^{-n} = -nZ^{n-1}\,\mathcal{E}.Z.$$

$$\mathcal{E}.Z^{-n} = \frac{-nZ^{n-1}\,\mathcal{E}.Z.}{Z^{2n}} = -nZ^{n-1-2n}\,\mathcal{E}.Z =$$

$$\mathcal{E}Z^{-n} = -nZ^{-n-1}\,\mathcal{E}.Z.$$ q. d. ien. erat.

Daher müßte ist der Ausdruck $Z^{2n}\cdot Z^{-n} = Z^{n}$ gewählt, denn Exp: wenn ich kommt in die Gl: nur ein $\mathcal{E}Z^{-n}$ vor, und kann daraus bestimmt werden — Es sei auch $Z^{-n-a}\cdot Z^{a} = Z^{-n}$

wird $\mathcal{E}Z^{-n-a}\cdot Z^{a} = \mathcal{E}Z^{-n}$

$Z^{-n-a}\cdot\mathcal{E}Z^{a} + Z^{a}\cdot\mathcal{E}Z^{-n-a} = \mathcal{E}Z^{-n}$

$Z^{-n-a}\cdot aZ^{a-1}\cdot\mathcal{E}Z + Z^{a}\,\mathcal{E}Z^{-n}\cdot Z^{-a} = \mathcal{E}Z^{-n}$

$Z^{-n-a}\cdot aZ^{a-1}\cdot\mathcal{E}Z + Z^{a}\cdot Z^{+n}\cdot\mathcal{E}Z^{-a} + Z^{a}Z^{-a}\,\mathcal{E}Z^{-n} = \mathcal{E}Z^{-n}$

$Z^{-n-a}aZ^{a-1}\mathcal{E}Z + Z^{-n+a}\cdot Z^{-a}\cdot\mathcal{E}Z = 0$

$\mathcal{E}Z^{-a} = -Z^{-n-a}\cdot a\cdot Z^{a-1}\cdot Z^{n-a}\cdot\mathcal{E}Z$

$\mathcal{E}Z^{-a} = -aZ^{-a-1}\cdot\mathcal{E}Z$

die Gl φ mit Z^{2n} dividirt und den Expon: bei der Divis abgez:

$\mathcal{E}.Z^{-n} = (nZ^{-n-1} - 2nZ^{-n-1})\,\mathcal{E}Z$

$= -nZ^{-n-1}\cdot\mathcal{E}Z$

Es mag also m eine ganze oder gebrochene positive od. negative Zahl seyn so gilt der Satz

Satz:

$$E.Z^m = mZ^{m-1} \times E.Z$$

jederzeit wahr.

Da wir nun ein Theil d. Beweises vom Binomisch Lehrsatze, wie 2ter Theil folgt, und als Vorbereitung, Satz. nimmt d. Nächste an:

§83. Lehrsatz:

Wenn eine Funktion $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots - Px^r + Qx^{r+1} + \ldots\ldots Zx^m = 0$ ist, bey jeglichem Werthe von x, auch $x = 0$ ist, müssten die Koeffizient A, B, C, D, etc. immer gleich Null seyn.

Denn wenn $x = 0$ ist so sind alle Glieder außer A, $= 0$ u. da die ganze Funktion $= 0$ ist so ist es auch A. Und um B anzuzeigen dividirt man die ganze Funct. durch x so erscheint B auch ohne x u. daher auch $= 0$ u. s. w.

Wenn 2 Funktionen wie $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + \ldots$ sind; so ~~[illegible]~~ können wir auf 2erley Art auf die Beschaffenheit der Koeffizienten schließen

Stellen wir beide Funct. der Gleichung auf 0 bringen so ist es dann

$$\left.\begin{array}{l} A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \dots \\ -a + bx - cx^2 - dx^3 - \dots \end{array}\right\} = 0$$ und daher

muß auch dann werden $A - a = 0$ $B - b = 0$ u. s. w. seyn.

2/ Abstrakt kann man gleich so schließen: wenn 2 Funkt. von einerlei Form einander gleich seyn sollen, und aus Gründen = sind, und haben aber diejenigen Glieder welche gleiche Dignität der veränderlichen Größe enthalten verschieden ausgedrückte Koeffizienten, so müssen auch diese einander gleich seyn.

daher gleich der Schluß, bei obigen Funktion $A = a$ $B = b$ $C = c$ u. s. w.

Sollen ferner 2 Funktion von einerley Form ~~gegeben~~ mit verschiedener Anzahl der Glieder einander gleich seyn, so kann das nur unter der Bedingung geschehen daß die Ueberschuß der Glieder von der längeren Funktion alle = 0 seyn mußten.

3/ Bei $A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 = a + bx$

$+cx^2+dx^3+ex^4+\ldots\ldots zx^m$ muß $A=a$, $B=b$. $C=c$, $D=d$, $E=e$ u.s.w. die übrigen Gleichungen der 2. Function bis zx^m müßten $=0$ sein. Solche Entwickelung der Coeffizienten können wir in der Anwendung oft nur.

§84. Seite 196. Aufgabe.

Mit Hülfe des Beweises des vorigen Abschnittes die m^{te} Potenz von $a+b$ zu finden; es mag m eine ganze oder gebrochene + oder negative Zahl sein.

Um dies zu bewerkstelligen, und die andern Exponenten entwickeln zu können muß man den Ausdruck $(a+b)$ etwas umformen, um eine Funct. zu erhalten die sich mit 1. anfängt so wie wir sie vorher gesetzt betrachtet haben. Wir setzen daher:

$$a+b = a+\frac{ab}{a} = a\left(1+\frac{b}{a}\right) \text{ also}$$

$$(a+b)^m = \left(a\left(1+\frac{b}{a}\right)\right)^m = a^m\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)^m.$$

der Kürze wegen setzt man $\frac{b}{a}=x$ und also

$$(a+b)^m = (1+x)^m\cdot a^m.$$

Obgleich nun unter x eine ~~un~~veränderliche Größe gedacht wird, so ist es hier doch nicht nöthig denn b. u. a. kann sich ja auch ändern.

Bei der Bildung einer Function für gewisse Größen

$$(1+x)^m = 1+Ax+Bx^2+Cx^3+\ldots\ldots\ldots+Px^{r-1}+Qx^r+Rx^{r+1}$$

$$m(1+x)^{m-1}\cdot d(1+x) = Z = Ax+2Bx^2+3Cx^3+\ldots\ldots(r-1)Px^{r-1}+rQx^r+(r+1)Rx^{r+1}$$

$$mx(1+x)^m = Z\cdot(1+x) = \left.\begin{matrix} Ax+2Bx^2+3Cx^3+\ldots\ldots(r-1)Px^{r-1}+rQx^r+(r+1)Rx^{r+1} \\ +Ax^2+2Bx^3+3Cx^4+\ldots\ldots(r-1)Px^r+rQx^{r+1}\end{matrix}\right\}=$$

$$= Ax+(2B+A)x^2+(3C+2B)x^3+\ldots\ldots(rQ+(r-1)P)x^r+((r+1)R+rQ)x^{r+1}$$

$$mx(1+x)^m = \text{entwickelt} = mx+mAx^2+mBx^3+\ldots\ldots mPx^r+mQx^{r+1}$$

Die Gl: exponentirt diese beiden Reihen muß man subtrahiren um 2 = förmige Reihen zu bekommen, und den Coeff. gleich zu stellen. Weil $(1+x)$ so schwer zu dividiren, daher multiplicirt man mit dem $(1+x)$ als Nenner.

demnach die Coeff: Gl:

$A=m$

$2B+A=mA$

$B=\frac{mA-A}{2}=\frac{m(m-1)}{2}$

$3C+2B=mB$

$C=\frac{mB-2B}{3}=\frac{(m-2)B}{3}=\frac{m(m-1)(m-2)}{2\cdot 3}$

$$\boxed{\begin{aligned} &rQ+(r-1)P=mP \\ &Q=\frac{mP-(r-1)P}{r}=\frac{[m-(r-1)]P}{r}\end{aligned}}$$

$(r+1)R+rQ=mQ$

$$R=\frac{mQ-rQ}{r+1}=\frac{(m-r)Q}{r+1}=\frac{(m-r)(m-(r+1))P}{r\cdot(r+1)}.$$

muß man die Funktion jederzeit so einrichten daß unter gewissen besondern Fällen die Funktion richtig ist.

In diesem Falle $(1+x)^m$ muß also nothwendig die Funktion mit 1 anfangen denn für $x = 0$ ist alsdann $1 = 1$. daher also werden wir setzen:

$$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots \ldots Px^{r-1} + Qx^r + Rx^{r+1} + \ldots \ldots = \underset{\wedge}{Z}$$

Sind wir nun im Stande aus dieser angenommenen Funktion die Koeffizienten A, B, C, D, etc. zu entwickeln, ohne auf Widersprüche und Unmöglichkeiten zu stoßen, so ist die angenommene Form der Funktion richtig, wo nicht so ist es eine andere:

Es sey nun also:

wird verdunkelt den Ausdruck - Cf. p. 163.

$(1+x) = y$ und $(1+x)^m = y^m$. daher also

$y^m = \underset{\wedge}{Z}$.

Hieraus ist nun

$\mathcal{E}.y^m = \mathcal{E}.\underset{\wedge}{Z}$;

$my^{m-1} \times \mathcal{E}.y = \mathcal{E}.\underset{\wedge}{Z}$,

$\frac{my^m}{y} \times \mathcal{E}.y = \mathcal{E}.\underset{\wedge}{Z}$.

$my^m \times \mathcal{E}.y = y\mathcal{E}.\underset{\wedge}{Z}$. statt y^m den Werth $\underset{\wedge}{Z}$

d. i. $m Z E.y = y E.Z$. ——— $\mathfrak{P}$.

Wir können uns also hier mit der Beschreibung dieser Function zu Hülfe ... weiter daß ~~[illegible]~~ für jede Gattung des Exponent m, das Exponentiale mithin auch obige Gleichung richtig sey.

Aufgelößt ist:

$$m Z = m + mAx + mBx^2 + mCx^3 + mDx^4 + \ldots\ldots mPx^{r-1} + mQx^r + mRx^{r+1} + \ldots$$

$$E.y = x.$$

x mal so ist

$$m Z E.y = mx + mAx^2 + mBx^3 + mCx^4 + mDx^5 + \ldots\ldots mPx^r + mQx^{r+1} + mRx^{r+2} + \ldots\ldots \underline{Dr.}$$

Vom 2ten Theile der obigen Gleichung $\mathfrak{P}$. ist

$$E.Z = Ax + 2Bx^2 + 3Cx^3 + 4Dx^4 + \ldots\ldots (r-1)Px^{r-1} + rQx^r + (r+1)Rx^{r+1} + \ldots$$

$$y = 1 + x.$$

$$y.E.Z = Ax + \left.\begin{array}{r}2B\\ A\end{array}\right| x^2 + \left.\begin{array}{r}3C\\ +2B\end{array}\right| x^3 + \left.\begin{array}{r}4D\\ +3C\end{array}\right| x^4 + \ldots\ldots + \left.\begin{array}{r}(r-1)P\\ \end{array}\right| x^{r-1} \left.\begin{array}{r}+rQ\\ (r-1)P\end{array}\right| x^r \left.\begin{array}{r}+(r+1)R\\ +rQ\end{array}\right| x^{r+1} \left.\begin{array}{r}\\ +(r+1)R\end{array}\right| x^{r+2}\ \underline{Er.}$$

Es ist also Dr. = Er. mithin

$$m = A.$$

$$2B = mA - A\ ;\quad B = \frac{A(m-1)}{2}$$

$$3C + 2B = mB\ ;\quad 3C = mB - 2B\ ;\quad C = \frac{B(m-2)}{3}$$

$$4D + 3C = mC\ ;\quad 4D = mC - 3C\ ;\quad D = \frac{C(m-3)}{4}$$

$$\vdots$$

$$rQ + (r-1)P = mP\ ;\quad rQ = mP - (r-1)P\ ;\quad Q = \frac{P.\, m-(r-1)}{r}$$

$$(r+1)R + rQ = mQ\ ;\quad (r+1)R = mQ - rQ\ ;\quad R = \frac{Q(m-r)}{r+1}$$

und so erhalten wir hierdurch eine Recurrirende Reihe d. h. eine solche wo jede Grösse od. Glied derselben immer von einem oder mehreren vorhergehenden Gliedern abhängig ist, also durch die vorhergehenden Gliedern bestimmt wird.

Nimmt man nun also in

$$(1+x)^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \ldots\ldots + Px^{r-1} + Qx^r + Rx^{r+1},$$

da A gleich m ist die Werthe für A, B, C, D u. s. w. so ist

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m.m-1}{1.2}x^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}x^3 + \frac{m.m-1.m-2.m-3}{1.2.3.4}x^4 + \ldots\ldots + P.\frac{m-(r-1)}{r}x^r + Q\frac{(m-r)}{r+1}x^{r+1} + \ldots\ldots$$

setzt man ferner für x den Werth $\frac{b}{a}$, so ist

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^m = 1 + m.\frac{b}{a} + \frac{m.m-1}{1.2}\frac{b^2}{a^2} + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}\frac{b^3}{a^3} + \frac{m.m-1.m-2.m-3.}{1.2.3.4}\frac{b^4}{a^4} + \ldots\ldots P.\frac{m-(r-1)}{r}\frac{b^r}{a^r} + Q\frac{(m-r)}{r+1}\frac{b^{r+1}}{a^{r+1}} + \ldots\ldots$$

multiplicirt man mit a^m, so ist

$$(a+b)^m = a^m + ma^{m-1}b + \frac{m.m-1}{1.2}a^{m-2}b^2 + \frac{m.m-1.m-2}{1.2.3}a^{m-3}b^3 + \frac{m.m-1.\ldots m-3}{1.2.\ldots 4}a^{m-4}b^4 + \ldots + \frac{m.m-1.m-2.\ldots\ldots m-(r-1)}{1.2.\ldots\ldots 4}a^{m-r}b^r + \frac{m.m-1.\ldots\ldots m-r}{1.2.\ldots(r+1)}a^{m-(r+1)}b^{r+1} + \ldots\ldots$$

und hieraus also ist es klar daß der vorige Abschnitt nur wie den Binomischen Lehrsatz etc.

für jegliche Zahl von m zu entwickeln annehmen, richtig ist.

Was nun noch folgende betrifft den 2ten Theil dieses Abschnitts, so wie es im Titel genannt wurde, nämlich die Anwendung des Binoms auf die (Entwickelung) Erfindung der unbestimmten Potenz, jeder ohne Ende fortlaufenden Funktion.

§ 85.

In der höhern Analysis kömmt es vor daß man mehrnamige Größen, und vorzugsweise 3 theilige Größen auf höhere Potenzen zu erheben hat; und hievon soll jetzt gehandelt werden.

Es soll also von einer Funktion

$$y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \ldots$$

die mte Dignität bestimmt werden.

Auch hier kömmt es nun darauf an eine Form der zu suchenden Funktion festzusetzen, daß bei jedem Werth von x die Funktion richtig sey, und nothwendig muß nun auch hier für x = 0 die Funktion mit 1 anfangen.

Da die Funktion ohne Ende fortgeht, so hat sie eine unbestimmte Form, will ich sie aber [illegible] bestimmt haben z. B. 4gliedrig so folgt daß $\delta = 0$ $\varepsilon = 0$ u. s. w. Will er sie 2theilig haben so folgt daß $\beta = 0$. γ δ 0

Nun ist es aus dem Vorigen bekannt daß eine 2theilige Funktion $(1 + xx)$ zu einer $n$ten Potenz erhoben mit 1. anfängt und dann weil in ihr die Exponenten von x immer um 2 steigen. Wird man nebst der obigen vieltheiligen Funktion von y so muß die auch mit 1 anfangen, weil $y^m = [1 + (\text{allerg.})]^m$ mit 1 anf. Wir werden also setzen können

$$y^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots\ldots = z$$

Nun muß weil wir wissen wir daß:

die Coeff. A, B, C bestimmt werden als z. B. beide Seiten der geg. Exponenten auf = Form gebracht, und die Coeff. = angesetzt.

$$\varepsilon . y^m = \varepsilon . z$$

$$m . y^{m-1} . \varepsilon . y = \varepsilon . z .$$

$$m y^m \varepsilon . y = y \varepsilon . z$$ für y^m den Werth z.

$$m z \, \varepsilon . y = y \varepsilon . z .$$ und x weil es in beiden Funktionen gemeinschaftlicher Factor ist, die Funktionen bequemer zu machen, herausgeschafft:

$$\frac{m z}{x} \varepsilon . y = \frac{y \varepsilon . z}{x} \ldots\ldots\ldots \text{G.}$$

Substituirt man nun hier wiederum die beiden Theile der Gleichung ?, so ist der erste Theil der Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathcal{E}.y}{x} = \alpha + 2\beta x + 3\gamma x^2 + 4\delta x^3 + 5\varepsilon x^4 + 6\zeta x^5 + \ldots\ldots \\ \text{u. } mz = m + m\mathfrak{A}x + m\mathfrak{B}x^2 + m\mathfrak{C}x^3 + m\mathfrak{D}x^4 + m\mathfrak{E}x^5 + m\mathfrak{F}x^6 + \ldots\ldots\end{array}\right\}\text{multiplizirt}$$

$$\frac{\mathcal{E}.y}{x}\,mz = \left.\begin{array}{r}m\alpha + 2m\beta\\ \alpha m\mathfrak{A}\end{array}\right|x \left.\begin{array}{r}+3m\gamma\\ +2m\beta\mathfrak{A}\\ +\alpha m\mathfrak{B}\end{array}\right|x^2 \left.\begin{array}{r}+4m\delta\\ +3\gamma m\mathfrak{A}\\ +2\beta m\mathfrak{B}\\ +\alpha m\mathfrak{C}\end{array}\right|x^3 \left.\begin{array}{r}+5m\varepsilon\\ +4\delta m\mathfrak{A}\\ +3\gamma m\mathfrak{B}\\ +2\beta m\mathfrak{C}\\ +\alpha m\mathfrak{D}\end{array}\right|x^4 \left.\begin{array}{r}+6m\zeta\\ +5\varepsilon m\mathfrak{A}\\ +4\delta m\mathfrak{C}\\ +3\gamma m\mathfrak{C}\\ +2\beta m\mathfrak{D}\\ +\alpha m\mathfrak{E}\end{array}\right|x^5 + \Bigg\} = \mathfrak{Q}x$$

und der 2te Theil von der Gleichung $\mathfrak{P}$. in $y\frac{\mathcal{E}.z}{x}$ ist:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{\mathcal{E}.z}{x} = \mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}x + 3\mathfrak{C}x^2 + 4\mathfrak{D}x^3 + 5\mathfrak{E}x^4 + 6\mathfrak{F}x^5 + \ldots\ldots \\ y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \delta x^4 + \varepsilon x^5 + \ldots\ldots\end{array}\right\}\text{multiplizirt}$$

$$\frac{\mathcal{E}.z.y}{x} = \left.\begin{array}{r}\mathfrak{A} + 2\mathfrak{B}\\ +\alpha\mathfrak{A}\end{array}\right|x \left.\begin{array}{r}+3\mathfrak{C}\\ +2\alpha\mathfrak{B}\\ \beta\mathfrak{A}\end{array}\right|x^2 \left.\begin{array}{r}+4\mathfrak{D}\\ +3\alpha\mathfrak{C}\\ +2\mathfrak{B}\beta\\ +\gamma\mathfrak{A}\end{array}\right|x^3 \left.\begin{array}{r}+5\mathfrak{E}\\ +4\alpha\mathfrak{D}\\ +3\beta\mathfrak{C}\\ +2\gamma\mathfrak{B}\\ +\delta\mathfrak{A}\end{array}\right|x^4 \left.\begin{array}{r}+6\mathfrak{F}\\ +5\alpha\mathfrak{E}\\ +4\beta\mathfrak{D}\\ +3\gamma\mathfrak{C}\\ +2\delta\mathfrak{B}\\ +\varepsilon\mathfrak{A}\end{array}\right|x^5 + \ldots \Bigg\} = -\mathfrak{L}$$

Da nun hier $\mathfrak{Q}x = \mathfrak{L}$ ist, so ist also auch:

$\mathfrak{A} = m\alpha$

$2\mathfrak{B} + \alpha\mathfrak{A} = 2m\beta + \alpha m\mathfrak{A}$; $\mathfrak{B} = \frac{2m\beta + \alpha m\mathfrak{A} - \alpha\mathfrak{A}}{2}$; $\mathfrak{B} = \frac{\alpha\mathfrak{A}(m-1) + 2m\beta}{2}$

$3\mathfrak{C} + 2\alpha\mathfrak{B} + \beta\mathfrak{A} = 3m\gamma + 2m\beta\mathfrak{A} + \alpha m\mathfrak{B}$; $3\mathfrak{C} = 3m\gamma + 2m\beta\mathfrak{A} + \alpha m\mathfrak{B} - 2\alpha\mathfrak{B} + \beta\mathfrak{A}$

und $\mathfrak{C} = \frac{3m\gamma + \mathfrak{B}\alpha(m-2) + \beta\mathfrak{A}(2m-1)}{3}$; ferner ist $4\mathfrak{D} + 3\alpha\mathfrak{C} + 2\mathfrak{B}\beta + \gamma\mathfrak{A} = 4m\delta + 3\gamma m\mathfrak{A} + 2\beta m\mathfrak{B} + \alpha m\mathfrak{C}$; $4\mathfrak{D} = 4m\delta + 3\gamma m\mathfrak{A} + 2\beta m\mathfrak{B} + \alpha m\mathfrak{C} - 3\alpha\mathfrak{C} - 2\mathfrak{B}\beta - \gamma\mathfrak{A}$; und

$$\mathfrak{D} = \frac{(m-3)\alpha\mathfrak{C} + (2m-2)\beta\mathfrak{B} + (3m-1)\mathfrak{A}\gamma + 4m\delta}{4}$$ hieraus läßt sich nun die folgenden Koeffizienten leicht entwickeln, da:

$$\mathfrak{E}' = \frac{(m-4)\alpha\mathfrak{D} + (2m-3)\beta\mathfrak{C} + (3m-2)\gamma\mathfrak{B} + (4m-1)\delta\mathfrak{A} + 5m\mathfrak{E}}{5.}$$

Jeder folgende Koeffizient ist also abhängig von allen vorhergehenden, und es kommt nun darauf an die Eigenthümlichkeit jedes unbestimmten Koeffizienten zu entwickeln.

Wenn man diese entwickelten Koeffizienten genauer betrachtet, so findet man bey ihnen folgende Gesetze.

1) der Koeffizient jedes Gliedes der verlangten Potenz y^m ist durch alle Koeffizienten der vorhergehenden Reihe von y^m bestimmt: er ist ein Bruch, dessen Zähler aus 39 so viel Theilen besteht, als der Nenner Einheiten hat.

2). der Nenner ist allemal eine Zahl welche anzeigt, von dem wie vielten ~~[illegible]~~ Koeffizienten die Rede ist.

3). In jedem Theile des Zählers wenn man seine Theile von der rechten gegen die Linke zu zählt, ist der Exponent m der verlangten Potenz von y mit derjenigen Zahl multiplizirt, welche die Stelle desselben Theiles im Zähler anzeigt, und vom Produkt ist die Zahl abgezogen, um welche ganze Zahl eines Binoms überstiegen wird, hierauf ist der Rest mit dem Koeffizienten desjenigen Gliedes von der Funktion $y = 1 + \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \ldots$, dessen Stelle durch die um m multiplizierte Zahl, angezeigt ist, d. mit dem Koeffizienten desjenigen Gliedes der Potenz $y^m = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \ldots$ multipliziert, dessen Stelle die um m abgezogene Zahl anzeigt.

Um nun bei einem allgemeinen n^{te} Gliede das Gesetz zu entdecken, setzen wir in d. F. y, die Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. $= \overset{I}{\lambda}, \overset{II}{\lambda}, \overset{III}{\lambda}, \overset{IV}{\lambda} \ldots \overset{r}{\lambda}, \overset{r+1}{\lambda}$, und eben so in F. y^m, die Koeffizienten A, B, C, D, E, ꝛc. $= \overset{I}{\mathcal{L}}, \overset{II}{\mathcal{L}}, \overset{III}{\mathcal{L}}, \overset{IV}{\mathcal{L}}, \overset{V}{\mathcal{L}}, \ldots \overset{r}{\mathcal{L}}, \overset{r+1}{\mathcal{L}}$, wo die römischen Zahlen die Ordnung bezeichnend sind.

Hiernach ist also allgemein:

$$y = 1 + \overset{I}{\lambda}x + \overset{II}{\lambda}x^2 + \overset{III}{\lambda}x^3 + \overset{IV}{\lambda}x^4 + \ldots \overset{r}{\lambda}x^r + \overset{r+1}{\lambda}x^{r+1} + \ldots$$
$$\overset{n-r+1}{\lambda} x^{n-r+1} + \ldots + \overset{n-1}{\lambda} x^{n-1} + \overset{n}{\lambda} x^n + \overset{n+1}{\lambda} x^{n+1} + \ldots\ldots$$
$$y^m = \tilde{z} = 1 + \overset{I}{\mathcal{L}}x + \overset{II}{\mathcal{L}}x^2 + \overset{III}{\mathcal{L}}x^3 + \ldots \overset{r}{\mathcal{L}}x^r + \overset{r+1}{\mathcal{L}}x^{r+1} + \ldots$$
$$\overset{n-r+1}{\mathcal{L}} x^{n-r+1} + \ldots \overset{n-1}{\mathcal{L}} x^{n-1} + \overset{n}{\mathcal{L}} x^n + \overset{n+1}{\mathcal{L}} x^{n+1} + \ldots$$

wo nämlich das r^{te} Glied und das $(n-r+1)^{\text{te}}$ Glied gleich weit
$[n - (r-1)]$

Wenn angenommen $r = 5$, so ist $\lambda^r x^r$ das 5te Glied vom Anfang, alsdann ist $\mathcal{L}^{n-(r-1)}$ auch das 5te vom Ende denn es ist $= \mathcal{L}^{n-4}$ und das folgende — $\mathcal{L}^{n-3}$ $\mathcal{L}^{n-2}$ $\mathcal{L}^{n-1}$ $\mathcal{L}^{n}$ aber das fest kein $\mathcal{L}^{n+1}$ Aufschluß auf das Gesetz geben der Reihe. —

Nach der hier auf Seite 170 (1. 2. 3) angestellten Betrachtungen, so könnte man den Koeffizienten und Glied $\overset{n}{L}x^n$ ~~hiefen~~ bestimmen, indem man wird daß der Nenner des Koeffizienten $\overset{n}{L}$; n seyn muß, und daß jeder $r$te Theil des Zählers genau durch $(rm-(n-r))\overset{n-r}{L}\overset{r}{\lambda}$ ausgedrückt wird, und man ersieht bei den 1te 2te 3te etc. Theil, wenn man für $r = 1, 2, 3$ etc. setzt. also ≡

$$\overset{n}{L} = \frac{(m-(n-1))\overset{n-1}{L}\overset{I}{\lambda} + (2m-(n-2))\overset{n-2}{L}\overset{II}{\lambda} + (3m-(n-3))\overset{n-3}{L}\overset{III}{\lambda} + \dots\dots + (rm-(n-r))\overset{n-r}{L}\overset{r}{\lambda} + \dots}{n}$$

Beweisen wir nun daß diese Formel für das $n$te Glied von F. y^m richtig sey, und daß das $(n+1)$te Glied demselben Gesetze unterworfen sey, so ist die Formel richtig.

Deshalb nehmen wir in der Gleichung von hier Seite 168: $\frac{mZE.y}{x} = \frac{yE.Z}{x}$ und entwickeln hierin die Werthe für Z Y etc. so erhalten wir zuförderst, wenn wir die Multi-gli

≡ nemlich $(n-r)$ und r sind nicht Exponenten, sondern Ordnungszeiger, um einen Anfang zu zeigen aus welchem Glied ~~der Reihe~~ der Coeff: genommen werden soll. siehe 1 (p 171)

λ ist Coeff der Reihe $y = 1+\alpha x+\beta x^2+\dots$

$\overset{r}{\lambda}$ zeigt den Coefficienten des $r$ten Gliedes der Reihe (1 nicht mitgerechnet)

L ist Coeff der Reihe $y^m = 1+Ax+Bx^2+\dots$

$\overset{n-r}{L}$ ist der Coeff: des $(n-r)$ten Glieds der Reihe

diese beiden Coeff: als Product müssen sich in ihrer Ordnungszahl nach ergänzen, eigenen Coeff: der ist immer rm − einer Zahl die um r kleiner ist als der Nenner, hier also $rm-(n-r)$

$(n-r)$ giebt immer die Ordnungszahl von L und r die von λ

darnach ist der Coeff ~~L~~ $\overset{n}{L}$ leicht zu bestimmen gliedweise verrichten; und zwar so verrichten, daß wir nur den n^{te} Gliedung von x erhalten, weshalb wir wie folgt, die beiden zu multiplizierenden [illegible], verkehrt unter einander schreiben, so:

$$\frac{m\mathcal{E}.y}{x} = m\overset{I}{\lambda} + 2m\overset{II}{\lambda}x + \ldots\ldots rm\overset{r}{\lambda}x^{r-1} + (r+1)m\overset{r+1}{\lambda}x^{r} + \ldots\ldots (n-r+1)m\overset{n-r+1}{\lambda}x^{n-r} + \ldots\ldots$$

$$z = \overset{n}{\mathcal{L}}x^{n} + \overset{n-1}{\mathcal{L}}x^{n-1} + \ldots\ldots \overset{n-r+1}{\mathcal{L}}x^{n-r+1} + \overset{n-r}{\mathcal{L}}x^{n-r} + \ldots\ldots \overset{r}{\mathcal{L}}x^{r} + \ldots\ldots$$

$$(n-1)m\overset{n-1}{\lambda}x^{n-2} + nm\overset{n}{\lambda}x^{n-1} + (n+1)m\overset{n+1}{\lambda}x^{n};$$

$$+\overset{II}{\mathcal{L}}x^{2}\ldots\ldots + \overset{I}{\mathcal{L}}x\ldots\ldots + 1$$

$$\frac{m\mathcal{E}.y\times z}{x} = m\overset{I}{\lambda}\overset{n}{\mathcal{L}}x^{n} + 2m\overset{II}{\lambda}\overset{n-1}{\mathcal{L}}x^{n} + \ldots\ldots rm\overset{r}{\lambda}\overset{n-r+1}{\mathcal{L}}x^{n} + (r+1)m\overset{r+1}{\lambda}\overset{n-r}{\mathcal{L}}x^{n} + \ldots (n-r+1)m\overset{n-r+1}{\lambda}\overset{r}{\mathcal{L}}x^{n} + \ldots$$

$$+(n-1)m\overset{n-1}{\lambda}\overset{II}{\mathcal{L}}x^{n} + nm\overset{n}{\lambda}\overset{I}{\mathcal{L}}x^{n} + (n+1)m\overset{n+1}{\lambda}x^{n} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \underline{\text{Dr.}}$$

Der 2te Theil d. Gleichung von φ ist:

$$\frac{\mathcal{E}.z}{x} = \overset{I}{\mathcal{L}} + 2\overset{II}{\mathcal{L}}x + \ldots\ldots r\overset{r}{\mathcal{L}}x^{r-1} + (r+1)\overset{r+1}{\mathcal{L}}x^{r} + \ldots\ldots (n-r+1)\overset{n-r+1}{\mathcal{L}}x^{n-r} + \ldots$$

$$y = \overset{n}{\lambda}x^{n} + \overset{n-1}{\lambda}x^{n-1} + \ldots\ldots \overset{n-r+1}{\lambda}x^{n-r+1} + \overset{n-r}{\lambda}x^{n-r} + \ldots\ldots \overset{r}{\lambda}x^{r} + \ldots\ldots$$

$$+(n-1)\overset{n-1}{\mathcal{L}}x^{n-2} + n\overset{n}{\mathcal{L}}x^{n-1} + (n+1)\overset{n+1}{\mathcal{L}}x^{n}$$

$$\overset{II}{\lambda}x^{2} + \overset{I}{\lambda}x + 1.$$

$$\frac{y\mathcal{E}.z}{x} = \overset{I}{\mathcal{L}}\overset{n}{\lambda}x^{n} + 2\overset{II}{\mathcal{L}}\overset{n-1}{\lambda}x^{n} + \ldots r\overset{r}{\mathcal{L}}\overset{n-r+1}{\lambda}x^{n} + (r+1)\overset{r+1}{\mathcal{L}}\overset{n-r}{\lambda}x^{n} + \ldots\ldots (n-r+1)\overset{n-r+1}{\mathcal{L}}\overset{r}{\lambda}x^{n} + \ldots$$

$$(n-1)\overset{n-1}{\mathcal{L}}\overset{II}{\lambda}x^{n} + n\overset{n}{\mathcal{L}}\overset{I}{\lambda}x^{n} + (n+1)\overset{n+1}{\mathcal{L}}x^{n}; \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; \underline{\text{Le.}}$$

Diese beiden Gleichungen Dr. und Le. sind ein einander nach d. Gleichung φ gleich. Die beiden Gleichungen kann man in jedem Glied x^{n} als [illegible] wenn man es dieses hineinsetzt so sind die Coefficienten auf einander gleich. Also hier wenn man das Glied und $\mathcal{L}$ die Größen in umgekehrter Ordnung schreibt:

$$\text{[illegible]}\; m\overset{I}{\lambda}\overset{n}{\mathcal{L}} + 2m\overset{II}{\lambda}\overset{n-1}{\mathcal{L}} + \dots\dots r m\overset{r}{\lambda}\overset{n-r+1}{\mathcal{L}} + (r+1)m\overset{r+1}{\lambda}\overset{n-r}{\mathcal{L}} + \dots (n-r+1)m\overset{n-r+1}{\lambda}\overset{r}{\mathcal{L}} + \dots$$

$$\text{[illegible]}\; -n\overset{I}{\lambda}\overset{n}{\mathcal{L}} - (n-1)\overset{II}{\lambda}\overset{n-1}{\mathcal{L}} - \dots -(n-r+1)\overset{r}{\lambda}\overset{n-r+1}{\mathcal{L}} - \dots\dots - r\overset{n-r+1}{\lambda}\overset{r}{\mathcal{L}} - \dots$$

$$\left.\begin{array}{l} +(n-1)m\overset{n-1}{\lambda}\overset{II}{\mathcal{L}} + nm\overset{n}{\lambda}\overset{I}{\mathcal{L}} + (n+1)m\overset{n+1}{\lambda} \\ -2\overset{n-1}{\lambda}\overset{II}{\mathcal{L}} \quad - \overset{n}{\lambda}\overset{I}{\mathcal{L}} \end{array}\right\} = (n+1)\mathcal{L}^{n+1};$$

diese Gleichung abgekürzt und durch $(n+1)$ dividirt

so ist:

$$\mathcal{L}^{n+1} = \frac{(m-n)\overset{I}{\lambda}\overset{n}{\mathcal{L}} + (2m-(n-1))\overset{n-1}{\mathcal{L}}\overset{II}{\lambda} + \dots - (rm-(n-r+1))\overset{n-r+1}{\mathcal{L}}\overset{r}{\lambda} + \dots\dots}{n+1}$$

$$+\frac{((n-1)m-2)\overset{II}{\mathcal{L}}\overset{n-1}{\lambda} + (nm-1)\overset{I}{\mathcal{L}}\overset{n}{\lambda} + (n+1)m\overset{n+1}{\lambda}}{n+1};$$

welches demselben Gesetze unterworfen ist wie es $\mathcal{L}^n$ war, vom n^{ten} Gliede.

Wollen wir nun $\mathcal{L}^n$ und $\mathcal{L}^{n+1}$ hier zu vergleichen um nur statt n, $(n-1)$ setzen, so ergibt sich

$$\mathcal{L}^n = \frac{(m-(n-1))\overset{I}{\lambda}\overset{n-1}{\mathcal{L}} + (2m-(n-2))\overset{n-2}{\mathcal{L}}\overset{II}{\lambda} + \dots - (rm-(n-r))\overset{n-r}{\mathcal{L}}\overset{r}{\lambda} + \dots}{n}$$

$$+\frac{((n-2)m-2)\overset{II}{\mathcal{L}}\overset{n-2}{\lambda} + ((n-1)m-1)\overset{I}{\mathcal{L}}\overset{n-1}{\lambda} + nm\overset{n}{\lambda}}{n};$$

Hieraus ist nun das Charakteristische sogleich einzusehen mitgetheilt und es folgen nun noch Anwendungen.

Zusatz.

Die Anwendung geschieht folgendermassen:
Es sey z. B. die m^{te} Potenz von einer 3theiligen Function $1+\alpha x+\beta x^2$ zu suchen.
Hier ist nach der vorigen Bedeutung $\alpha=\overset{I}{\lambda}$; $\beta=\overset{II}{\lambda}$
$\overset{III}{\lambda}=0$ $\overset{IV}{\lambda}=0$ u. s. w., und

$$(1+\alpha x+\beta x^2)^m=1+\overset{I}{\mathcal{L}}x+\overset{II}{\mathcal{L}}x^2+\overset{III}{\mathcal{L}}x^3+\ldots\ \overset{n}{\mathcal{L}}x^n+\overset{n+1}{\mathcal{L}}x^{n+1}+\ldots$$

und nun ist, das n^{te} Glied.

$$\overset{n}{\mathcal{L}}=\frac{(m-(n-1))\overset{n-1}{\mathcal{L}}\alpha+(2m-(n-2))\overset{n-2}{\mathcal{L}}\beta}{n}$$

Setzt man nun für n, — ~~Null~~, 1, 2, 3, 4 5te .. so erhält man das 1te 2te 3te 4te 5te .. Glied der verlangten Potenz. Es wird also:

$$\overset{I}{\mathcal{L}}=m\alpha \quad \text{— — — für } n=1.$$

$$\overset{II}{\mathcal{L}}=\frac{(m-1)\overset{I}{\mathcal{L}}\alpha+2m\beta}{2} \quad \text{— —} \quad n=2.$$

$$\overset{III}{\mathcal{L}}=\frac{(m-2)\overset{II}{\mathcal{L}}\alpha+(2m-1)\overset{I}{\mathcal{L}}\beta}{3} \quad \text{—} \quad n=3$$

$$\overset{IV}{\mathcal{L}}=\frac{(m-3)\overset{III}{\mathcal{L}}\alpha+(2m-2)\overset{II}{\mathcal{L}}\beta}{4} \quad \text{—} \quad n=4$$

$$\overset{V}{\mathcal{L}}=\frac{(m-4)\overset{IV}{\mathcal{L}}\alpha+(2m-3)\overset{III}{\mathcal{L}}\beta}{5} \quad \text{—} \quad n=5$$

$$\overset{VI}{\mathcal{L}}=\frac{(m-5)\overset{V}{\mathcal{L}}\alpha+(2m-4)\overset{IV}{\mathcal{L}}\beta}{6} \quad \text{—} \quad n=6.$$

u. s. w.

Will man diese Coëfficienten nun noch mehr bestimmen wollen, so darf man nur den Werth von $\overset{I}{\mathcal{L}}$ in $\overset{II}{\mathcal{L}}$, und dann den Werth $\overset{II}{\mathcal{L}}$ in $\overset{III}{\mathcal{L}}$ setzen u. s. w.

Wenn man hiezu die verlangte Potenz $(1+\alpha x+\beta x^2)^m$ bestimmt, z. B. $m = 3$, so sucht man so viele Coefficienten bis man auf einen stößt der $= 0$ wird, so wird man finden: F

F da der allg. Coeff. aus 2 Theilen besteht, so wird gewöhnlich das erste zuerst $= 0$ dann auch das zweite Theil

$$\overset{I}{\mathcal{L}} = 3\alpha$$

$$\overset{II}{\mathcal{L}} = \frac{2\overset{I}{\mathcal{L}}\alpha + 6\beta}{2} = 3\alpha^2 + 3\beta$$

$$\overset{III}{\mathcal{L}} = \frac{\overset{II}{\mathcal{L}}\alpha + 5\overset{I}{\mathcal{L}}\beta}{3} = \alpha^3 + 6\alpha\beta$$

$$\overset{IV}{\mathcal{L}} = \frac{4\overset{II}{\mathcal{L}}\beta}{4} = \overset{II}{\mathcal{L}}\beta = 3\alpha^2\beta + 3\beta^2$$

$$\overset{V}{\mathcal{L}} = \frac{-\overset{IV}{\mathcal{L}}\alpha + 3\overset{III}{\mathcal{L}}\beta}{5} = 3\alpha\beta^2$$

$$\overset{VI}{\mathcal{L}} = \frac{-2\overset{V}{\mathcal{L}}\alpha + 2\overset{IV}{\mathcal{L}}\beta}{6} = \beta^3$$

$$\overset{VII}{\mathcal{L}} = \frac{-3\overset{VI}{\mathcal{L}}\alpha + \overset{V}{\mathcal{L}}\beta}{7} = \frac{-3\alpha\beta^3 + 3\alpha\beta^3}{7} = 0$$

Es ist also $(1+\alpha x+\beta x^2)^3 = 1 + 3\alpha x + (3\alpha^2 + 3\beta)x^2 + {} + (\alpha^3 + 6\alpha\beta)x^3 + (3\alpha^2\beta + 3\beta^2)x^4 + 3\alpha\beta^2 x^5 + \beta^3 x^6$;

Wi

Zusatz 2.

Wenn eine Function von der Form $\alpha + \beta x + \gamma x^2 +$

$\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4+\dots\dots$ gegeben wird und man die m^{te} Potenz von ihr verlangt, so setze man

$$(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)^m = \left(1+\frac{\beta}{\alpha}x+\frac{\gamma}{\alpha}x^2+\frac{\delta}{\alpha}x^3+\frac{\varepsilon}{\alpha}x^4\right)^m\cdot\alpha^m;$$

um eine Funktion zu erhalten die mit 1 anfängt. d. h. man dividire also die Funktion mit dem ersten Gliede und setze denselben als Factor außerhalb der Klammer an. Dasselbe thue man bei einer Funktion

$$(x+ax^2+bx^3+cx^4)^m = (1+ax+bx^2+cx^3)^m\cdot x^m,$$ und

suche sodann die m^{te} Potenz der zusammengesetzten Funktion wie vorhin.

Die allgemeinste Form einer solchen Funktion ist:

$$z = Ax^m + Bx^{m+d} + Cx^{m+2d} + Dx^{m+3d} + Ex^{m+4d} + \dots$$

will man nun die ersten Glieder einer beliebigen Potenz k von ihr wissen, so würde man dieselben auf folgende Art finden können.

Es ist $$z = \left(1+\frac{B}{A}x^d+\frac{C}{A}x^{2d}+\frac{D}{A}x^{3d}+\frac{E}{A}x^{4d}\right)Ax^m$$

setze man nun $\frac{B}{A}=\alpha$; $\frac{C}{A}=\beta$, $\frac{D}{A}=\gamma$, $\frac{E}{A}=\delta$; $x^d=y$, so ist $x=y^{\frac{1}{d}}$.

so ist:

$$z = (1+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\delta y^4)\,Ay^{\frac{m}{d}}$$ und

$$z^k = (1+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\delta y^4)^k\cdot Ay^{\frac{mk}{d}};$$ und können

Hierbei kommt es nun darauf an, die ersten Glieder der Potenz $(1+\alpha y+\beta y^2+\gamma y^3+\ldots)^k$ nach oben zu bestimmen, alles mit $Ay^{\frac{mk}{\alpha}}$ zu multipliciren und endlich die Werthe für $\alpha, \beta, \gamma, \delta,$ zu substituiren
Es wird aber jeder Coeff: an sich einen unendl. Reihe bilden
z. zum Beispiel.

$$y = \frac{a}{\sqrt[5]{(3x^4-x^5+2x^7-6x^{11})^3}} = \frac{a}{x^2\sqrt[5]{27x^2}}\left(1-\tfrac{1}{3}x+\tfrac{2}{3}x^3-2x^7\right)$$

Für die Funktion $\left(1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}x^3-2x^7\right)^{-\frac{3}{5}} = Z$ ist

$$m=-\tfrac{3}{5}\ ;\quad \overset{I}{\lambda}=-\tfrac{1}{3}\ ;\ \overset{II}{\lambda}=0\ ;\ \overset{III}{\lambda}=\tfrac{2}{3}\ ;\ \overset{IV}{\lambda}=\overset{V}{\lambda}=\overset{VI}{\lambda}=0\ ;\ \overset{VII}{\lambda}=-2\ ;$$

und die zu suchende Funktion:

$$Z^m = 1+\overset{I}{\mathcal{L}}x+\overset{II}{\mathcal{L}}x^2+\overset{III}{\mathcal{L}}x^3+\ldots\ \overset{n}{\mathcal{L}}x^n+\ldots$$

und der ~~nte~~ Koefficient des n^{te} Gliedes in der Reihe Z^m:

$$\Psi = \overset{n}{\mathcal{L}} = \frac{-\frac{1}{3}\left(m-(n-1)\right)\overset{n-1}{\mathcal{L}}+\frac{2}{3}\left(3m-(n-3)\right)\overset{n-3}{\mathcal{L}}-2\left(7m-(n-7)\right)\overset{n-7}{\mathcal{L}}}{n}$$

Für

$n=1$ ist $\overset{I}{\mathcal{L}} = -\frac{1}{3}m$

$n=2$ — $\overset{II}{\mathcal{L}} = \dfrac{-(m-1)\frac{1}{3}\overset{I}{\mathcal{L}}}{2}$

$n=3$ — $\overset{III}{\mathcal{L}} = \dfrac{-\frac{1}{3}(m-2)\overset{II}{\mathcal{L}}+\frac{2}{3}\cdot 3m}{3}$

$n=4$ — $\overset{IV}{\mathcal{L}} = \dfrac{-\frac{1}{3}(m-3)\overset{III}{\mathcal{L}}+\frac{2}{3}(3m-1)\overset{I}{\mathcal{L}}}{4}$

$n=5$ ist $\overset{\text{V}}{\mathcal{L}} = \dfrac{-\frac{1}{3}(m-4)\overset{\text{IV}}{\mathcal{L}} + \frac{2}{3}(3m-2)\overset{\text{II}}{\mathcal{L}}}{5}$

$n=6$ — $\overset{\text{VI}}{\mathcal{L}} = \dfrac{-\frac{1}{3}(m-5)\overset{\text{V}}{\mathcal{L}} + \frac{2}{3}(3m-3)\overset{\text{III}}{\mathcal{L}}}{6}$

$n=7$ ist $\overset{\text{VII}}{\mathcal{L}} = \dfrac{-\frac{1}{3}(m-6)\overset{\text{VI}}{\mathcal{L}} + \frac{2}{3}(3m-4)\overset{\text{IV}}{\mathcal{L}} - 7m\cdot 2}{7}$

$n=8$ ist $\overset{\text{VIII}}{\mathcal{L}} = \dfrac{-\frac{1}{3}(m-7)\overset{\text{VII}}{\mathcal{L}} + \frac{2}{3}(3m-5)\overset{\text{V}}{\mathcal{L}} - 2(7m-1)\overset{\text{I}}{\mathcal{L}}}{8}$

Setzt man für m die Werthe so ist

$\overset{\text{I}}{\mathcal{L}} = +\frac{3}{15}$ ——————— $= +\frac{1}{5}$

$\overset{\text{II}}{\mathcal{L}} = +\frac{8}{30}\overset{\text{I}}{\mathcal{L}}$ ——————— $= +\frac{4}{75}$

$\overset{\text{III}}{\mathcal{L}} = +\dfrac{13\overset{\text{II}}{\mathcal{L}} - 18}{45}$ ——————— $= -\frac{1298}{3375}$

$\overset{\text{IV}}{\mathcal{L}} = +\dfrac{18\overset{\text{III}}{\mathcal{L}} - 28\overset{\text{I}}{\mathcal{L}}}{60}$ ——————— $= -\frac{1174}{5625}$

$\overset{\text{V}}{\mathcal{L}} = +\dfrac{23\overset{\text{IV}}{\mathcal{L}} - 38\overset{\text{II}}{\mathcal{L}}}{75}$ ——————— $= -\frac{38402}{421875}$

$\overset{\text{VI}}{\mathcal{L}} = +\dfrac{28\overset{\text{V}}{\mathcal{L}} - 48\overset{\text{III}}{\mathcal{L}}}{90}$ ——————— $= +\frac{3356372}{189843750}$

$\overset{\text{VII}}{\mathcal{L}} = +\dfrac{33\overset{\text{VI}}{\mathcal{L}} - 58\overset{\text{IV}}{\mathcal{L}} + 126}{105}$ ——————— $= +\frac{910867342}{664453125}$

$\overset{\text{VIII}}{\mathcal{L}} = +\dfrac{38\overset{\text{VII}}{\mathcal{L}} - 68\overset{\text{V}}{\mathcal{L}} + 136\overset{\text{I}}{\mathcal{L}}}{120.}$ ——————— $= +\frac{7432093837}{9966796875}$

Und endlich wenn man in $\overset{m}{\mathcal{L}}$ die Werthe für $\overset{\text{I}}{\mathcal{L}}\,\overset{\text{II}}{\mathcal{L}}$ u. s. w. setzt und mit $\dfrac{a}{x^2\sqrt[5]{27x^2}}$ multiplizirt, so ist:

$$y = \frac{a}{x^2\sqrt[5]{27x^2}}\cdot\left(1 + \frac{1}{5}x + \frac{4}{75}x^2 - \frac{1298}{3375}x^3 - \frac{1174}{5625}x^4 - \frac{38402}{421875}x^5 + \frac{3356372}{189843750}x^6 + \frac{910867342}{664453125}x^7 + \frac{7432093837}{9966796875}x^8 + \dots\right)$$

Beim Einsetzen der Werthe in die Formel + die ~~d~~ nten Coeff ergiebt muß man bedenken, daß die Zeichen über $\mathcal{L}$, Ordnungszahlen nicht Exponenten sind. Deshalb die Ordnungszahl kleiner Eins sobald n kleiner als die abzuziehende Zahl, so bedeutet nur daß dieses Glied in der Reihe + nicht vorhanden ist. daher für $n=1$ und $n=2$ kann der Ausdruck nur in den ersten Theil ganz + hereingesetzt werden bei $n=3$ auch in den 2ten Theil u.s.w.

IX Abschnitt.

Von den quadratischen Gleichungen, und unbestimmten Aufgaben.

Die Gleichungen überhaupt werden eingetheilt in *einfache* und *zusammengesetzte*. *Einfach* heißt eine Gleichung wenn x nur in der 1te Potenz vorkommt. *Zusammengesetzt* wenn x in einer höhern Potenz erscheint, und nach dem höchsten Exponenten der ihr den Namen giebt heißen sie, quadratisch, cubisch, u.s.w., u. überhaupt Gleichungen von dem nte Grade, wenn n der höchste Exponent des x ist. Man nennt sie auch *höhere* Gleichungen.

Vollständig heißt eine höhere Gleichung wenn x in allen Potenzen nach und nach um 1 fallend vorkommt, fehlen aber zwischen d. 1te u. höchsten Potenz einige Dignitäten so heißt sie *unvollständig*.

Zur *Auflösung* d. quadratischen Gleichungen hat man bestimmte Regeln, die Gleichungen höher. Ordnung kann man aber allgemein behandeln weil man für sie einzeln mit ihren bestimmten Regeln d. Auflösung gefunden hat.

Wurzelgrößen so möglich aus einer Gleichung wegzuschaffen; denn kann man dies nicht thun, so wird damit klar daß man keine Methode zu geben weiß, wodurch man jemals zum Ziele kommt.

Stehen √Größen in einer Gleichung von einerlei Grade nur und ohne Verbindung mit andern Größen so wird dies sich leicht thun lassen z. B. $\sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{b}$

$= a = b$.

Sind dieselben aber wie $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} = c$ wird die √Wegschaffung unmöglich. denn $(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b})^3 = c^3 = a + 3\sqrt[3]{a^2}\sqrt[3]{b} + 3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b^2} + b = c^3$

In der Anwendung stößt man in der Regel nur auf ~~Größen~~ einzelne Verbindungen von √Größen.

und da man überhaupt nur dann eine Gleichung rational zu machen sucht, wenn sich ~~die~~ die unbekannte Größe unter dem √Zeichen zeigt, so ist das darauf nöthig eine Methode anzugeben wodurch das geschieht, die bekannten Größen können dann immer irrat. seyn.

In der Anwendung kommen hiernun nur gewöhnlich folgende Fälle vor:

1) Wenn sich nur 1 √ Zeichen in der Gleichung befindet.

Hier schafft man nur das √ Zeichen auf eine Seite, und sucht die x Größe gesondert zu erhalten, und erhebt dann die Gleichung auf die Potenz des √ Exponenten.

z. B. $a-\sqrt[3]{a+x}=b.$

$$\sqrt[3]{a+x}=a-b,$$
$$\left(\sqrt[3]{a+x}\right)^3=(a-b)^3$$
$$a+x=(a-b)^3$$
$$x=(a-b)^3-a.$$

2/. Wenn sich unter dem √ Zeichen noch mehrere √ Zeichen befinden z. B.

$$\sqrt{ax-\sqrt[3]{cx+d+\sqrt{x}}}=a-b^2c$$
$$ax-\sqrt[3]{cx+d+\sqrt{x}}=(a-b^2c)^2$$

~~ax~~ $+\sqrt[3]{cx+d+\sqrt{x}}=ax-(a-b^2c)^2$

$$cx+d+\sqrt{x}=\left(ax-(a-b^2c)^2\right)^3$$
$$\sqrt{x}=\left[ax-(a-b^2c)^2\right]^3-cx-d$$
$$x=\left[\left[ax-(a-b^2c)^2\right]^3-cx-d\right]^2$$

Um nun x völlig frei herzustellen erhebe man wieder und nenne der längeren Arbeit wegen zu scheuen, gesetzten Ausdrucks bekannter Größen u. einzelner Buchstaben: wie

$(a-b^2c) = f$. so ist

$$x = \left[\left[ax-f^2\right]^3 - cx - d\right]^2$$

$$x = \left(a^3x^3 - 3a^2x^2f^2 + 3axf^4 - f^6 - cx - d\right)^2$$

$x = \left(a^3x^3 - 3a^2x^2f^2 + x(3af^4-c) - f^6 - d\right)^2$; wenn $(3af^4-c) = g$. u. $(f^6+d) = h$ gesetzt

$x = \left(a^3x^3 - 3a^2x^2f^2 + gx - h\right)^2$ und zum Quadrat erhoben ist.

$$x = a^6x^6 - 6a^5f^2x^5 + 9a^4x^4f^4 + 2a^3gx^4 - 6a^2gf^2x^3 + g^2x^2 - 2a^3hx^3 + 6a^2hf^2x^2 - 2ghx + h^2$$

$$a^6x^6 - 6a^5f^2x^5 + (9a^4f^4 + 2a^3g)x^4 - (6a^2gf^2 + 2a^3h)x^3 + (6a^2hf^2 + g^2)x^2 - (2gh+1)x + h^2 = 0.$$

$$x^6 - \frac{6a^5f^2}{a^6}x^5 + \left(\frac{9a^4f^4 + 2a^3g}{a^6}\right)x^4 - \left(\frac{6gf^2 + 2ah}{a^4}\right)x^3 + \left(\frac{6a^2hf^2 + g^2}{a^6}\right)x^2 - \left(\frac{2gh+1}{a^6}\right)x + \frac{h^2}{a^6} = 0$$

3) Wenn 2 verschiedenartige √ Größen in einer Gleichung vorhanden sind.

diese Wegschaffung ist nicht immer möglich, und es gehört ~~[illegible]~~ wo es möglich viel Umsicht dazu. z.B.

$$\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} = a.$$

Man fange d. Wegschaffung bei höchsten √ Exponenten an, u. versuche, stößt man aber in der Auflösung wieder auf verschiedenartige √ Exponenten oder unter den √ Zeichen auf verschiedenen Größen so ist die Operation nicht anwerden; da man bei jeder Potenzirung immer noch solche √ Größen erhalten würde. also

$$\cancel{\sqrt[3]{x} = a - \sqrt{x}}$$

$$\cancel{x = a^3 - 3a^2\sqrt{x} + 3ax - x\sqrt{x}}$$

$$\cancel{x = a^3 + \sqrt{x}(3a - 3a^2 - x)}$$

$$\sqrt[3]{x} = a - \sqrt{x}$$

$$x = a^3 - 3a^2\sqrt{x} + 3ax - x\sqrt{x}.$$

$$-x + a^3 + 3ax = \sqrt{x}(3a^2 - x)$$

$$x(3a^2 - x)^2 = (a^3 + 3ax - x)^2$$

$$x(9a^4 - 6a^2x^2 + x^2) = a^6 + 6a^4x + 9a^2x^2 - 6ax^2 + x^2;\ \text{und}$$

$$x^3 - 6a^2x^2 + 9a^4x = a^6 + 6a^4x + 9a^2x^2 - 6ax^2 + x^2;$$

$$x^3 + (6a - 15a^2 + 1)x^2 + 3a^4x - a^6 = 0;$$

I. Reine quadratische Gleichungen

Man schafft das Quadrat d. x Größe auf die eine Seite (u. zwar +) der Gleichung, und betrachtet sie also vorläufig ganz wie einfache Gleichungen. Die einfachste Form ist:

$$x^2 = a$$

$$x = \pm\sqrt{a}.$$

Man glaubt, x habe hier gleichzeitig zwey entgegengesetzte Werthe; es kann nur + oder − seyn, und + und − ist hier bloß als Alternative anzusehen. Welcher Werth genommen werden soll, wird auch der Aufgabe jedesmal klar seyn. Es ist $x^2 = \pm\sqrt{25}$ d. i. $x = +5$ oder -5. denn beides gibt 25.

z. B. $b - ax^2 = \frac{cx^2}{a} - d$. ist

$$ab - a^2x^2 = cx^2 - ad;$$

$$x^2(c + a^2) = ab + ad;$$

$$x^2 = \frac{ab + ad}{c + a^2}; \text{ und}$$

$$x = \sqrt{\frac{ab + ad}{c + a^2}}$$

II. Unreine quadr. Gleichungen.

Man legt nun dem Quadrate ~~einer Größe die sich~~ ~~zwar einer~~ 2theiligen Größe, und diese vollständig oder unvollständig.

Die 4 Hauptformen sind.

$$(\pm a \pm b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(\pm a \mp b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$ Sind vollständige Quadrate einer 2theiligen Größe ist daher nothwendig

aus 3 Theilen bestehen.

Ist das Product 2ab negativ so ist auch eine √ + die andre √ −; ist das Product +2ab, so sind entweder die Wurzeln beide − od. beide + u welche genommen wird muß d. Aufgabe hervorgehen.

Gewöhnlich nimmt man wenn −2ab ist, die erste √ als positiv an u die 2te negativ, und wenn +2ab steht, beide + wenn n. die Aufgabe das Gegentheil fordert.

$a^2 \pm 2ab$, oder $b^2 \pm 2ab$ wären also unvollständige Quadrate, um sie vollständig zu machen

zieht man aus dem ersten Theil die √, verdoppelt sie und dividirt durch den 2ten Theil des unvollständigen Quadrats; so giebt der Quotient den 2ten Theil der √ selbst. diesen quadrirt u zu addirt giebt alsdann ein vollständiges Quadrat.

Beyspiel. $4a^2x - 6ac$ sey ein unvollständiges Quadrat

$\sqrt{4a^2x} = 2a\sqrt{x}$; $\frac{-6ac}{2 \cdot 2a\sqrt{x}} = -\frac{3c}{2\sqrt{x}}$; und

$\left(-\frac{3c}{2\sqrt{x}}\right)^2 = +\frac{9c^2}{4x}$ und hiernach

$4a^2x - 6ac + \frac{9c^2}{4x}$ ein vollständiges Quadrat.

Es ist übrigens möglich daß ein □ in der Art unvollständig ist daß einer der √ irrational ist.

Jede gemischte quadratische Gleichung hat folgende Grundform.

$$x^2 \pm ax = \pm b$$

Wenn eine solche quadratische Gleichung aufgelöst werden soll, so muß sie folgende wesentliche Eigenschaften haben:

1) muß der einen Seite des Gleichheitszeichens muß das Quadrat, allein, und + stehen.

2. auf derselben Seite muß ein anderes Glied stehen, worin die unbekannte Größe mit irgend einem + oder − Koeffizienten multiplizirt ist.

3) Es muß der andern Seite des = Zeichens eine ganz bekannte Größe stehen.

Also $x^2 \pm ax = \pm b$ vollständig gemacht ist:

$$x^2 \pm ax + \tfrac{1}{4}a^2 = \pm b + \tfrac{1}{4}a^2 \text{; und}$$

$$x \pm \tfrac{1}{2}a = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 \pm b} \text{, endlich}$$

$$x = \mp \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 \pm b}$$

Es geht dieß schon daraus hervor weil Binomium kein Produkt ist.

Hüten muß man sich nur $\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 \pm b}$ nicht = zu setzen $\pm\tfrac{1}{2}a\sqrt{\pm b}$. Zum Beleg:

$a^2 + b^2 = c^2$; $c = \sqrt{a^2+b^2}$, nicht $= a + \sqrt{b^2} = a + b$

In der Anwendung macht er gleich die Schlußgleichung, und es ist der Werth der unbekannten Größe = dem halben Koeffizienten des 2ten Gliedes aber mit entgegengesetztem Zeichen, + oder − einer √ aus dem Quadrat dieses halben Koeffizienten, und dem Zusatze der ganz bekannten Größe auf der zweiten Seite des Gleichheitszeichens mit seinem ihm eigenthümlichen Zeichen.

Da nun bey einer unreinen quadratischen Gleichung das x nicht allein da steht, sondern auch noch mit einem Koeffizienten verbunden ist, so kann man zu unserer folgende allgemeine Form darstellen:

$$Mx^2 \pm Nx = \pm P$$

$$x^2 \pm \frac{N}{M}x = \pm \frac{P}{M} \text{ und}$$

$$x = \mp \frac{N}{2M} \pm \sqrt{\frac{N^2}{4M^2} \pm \frac{P}{M}} \;;$$

$$x = \mp \frac{N}{2M} \pm \sqrt{\frac{N^2 \pm 4MP}{4M^2}}$$

$$x = \mp \frac{N}{2M} \pm \frac{\sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M} \text{ und endlich}$$

$$x = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M}.$$

Dieses kann als Normalformel dienen um

in

in praktischen Fällen allgemeine Auflösungen machen zu können.

Beispiel
$$acd)\ \frac{b}{c} - \frac{ax^2+b}{d} = \frac{2x^2-x}{a} + ax$$

$$abd - a^2cx^2 + abc = 2cdx^2 - cdx + a^2cdx;$$

$$abd - abc = x^2(2cd + a^2c) + (a^2cd - cd)x$$

$$x^2 + \frac{a^2cd - cd}{2cd + a^2c}x = \frac{abd - abc}{2cd + a^2c}$$ ist dann $x = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M}$.

$$x = \frac{-cd(1-a^2) \pm \sqrt{c^2d^2(a^2-1)^2 \pm 4abc(2d+a^2)(d-c)}}{2c(2d+a^2)}$$

Es können hier noch einige Gleichungen angeschlossen werden welche eigentlich höhere Gleichungen sind, durch ihre eigenthümliche Beschaffenheit aber sich einerlei Behandlung als quadratische unterwerfen.

Nämlich wenn eine Gleichung gegeben ist

$$Mx^{2n} \pm Nx^n = \pm P$$

d. h. eine Gleichung welche allerdings vom $2n^{\text{ten}}$ Grade ist, die aber das Charakteristische hat daß die unbekannte Größe in einer höhern *geraden* Dignität erscheint, daß ferner noch eine Größe, in welcher die unbekannte Größe genau in der $\frac{1}{2}$ Dignität enthalten ist. Diese Gleichungen lassen sich ganz wie reine quadratische behandeln, um das zu bewerkstelligen setzt man $x^n = z$ so ist

$$Mx^{2n} \pm Nx^n = \pm P;\ \text{daher}$$

$$Mz^2 \pm Nz = \pm P \ \text{und}$$

$$z = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M.} \ \text{und also}$$

$$x^n = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M.} \ \text{und}$$

$$x = \sqrt[n]{\frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4M.P}}{2M.}}$$

bei $\sqrt[n]{\ }$ Zeichen ist hier wieder ± weil n eine gerade oder ungerade Zahl seyn kann.

Beispiel in Zahlen:

$$x^6 - 2x^3 = 8$$

$$x^3 = \frac{2 \pm \sqrt{4+32}}{2}$$

$$x^3 = \frac{2 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} \ \text{und}$$

$$x = \begin{cases} \sqrt[3]{4} \\ \sqrt[3]{-2} \end{cases}$$

Aufmerksam muß man auf das [illegible], [illegible] [illegible] Buchstaben [illegible] die Combination angewandt werden kann; hierfür lassen sich aber nicht Regeln geben, sondern nur die Übung muß das geben.

der Vortheil [illegible] ist hier zu ersehen. z.B.

$$adx - acx^2 = bcx - bd$$

$$\cancel{acx^2 + (bd - bc)x}$$

$$acx^2 + (bc - ad)x = bd$$ hier ist $M = ac$, $N = (bc - ad)$; u. $P = bd$

und nach der Formel $x = \dfrac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M}$ ist hier

$$x = \frac{ad - bc \pm \sqrt{(bc - ad)^2 + 4bdac}}{2ac} = \frac{ad - bc \pm \sqrt{b^2c^2 - 2abcd + a^2d^2 + 4abcd}}{2ac};$$

$$x = \frac{ad - bc \pm (ad + bc)}{2ac}$$; und hieraus ist

$$\underline{x = \frac{2ad}{2ac} = \frac{d}{c}}$$ oder $\underline{x = -\frac{b}{a}}$;

Beyspiel:

$$ax(1+d) - bd = \frac{ax(b - ax)}{c} - cd$$

$c)$ $$acx(1+d) - bcd = abx - a^2x^2 - c^2d$$ und

$$a^2x^2 + acx(1+d) - abx = bcd - c^2d$$

$$a^2x^2 + x\left[ac(1+d) - ab\right] = cd(b - c)$$; hier $M = a^2$; $N = ac(1+d) - ab$; $P = cd(b-c)$

$$x = \frac{-\left(ac(1+d) - ab\right) \pm \sqrt{\left[ac(1+d) - ab\right]^2 + 4a^2cd(b-c)}}{2a^2}$$

$$x = \frac{-a(c + cd - b) \pm \sqrt{a^2(c + cd - b)^2 + a^2(4cdb - 4c^2d)}}{2a^2}$$

$$x = \frac{-(c + cd - b) \pm \sqrt{c^2 + 2c^2d + c^2d^2 - 2cb - \cancel{2cdb} + \cancel{4cbd} - 4c^2d + b^2}}{2a}$$

$$x = \frac{-(c + cd - b) \pm \sqrt{c^2 - 2c^2d + c^2d^2 - 2bc + 2bcd + b^2 + \cancel{\quad}}}{2a} =$$

$$x = \frac{-(c + cd - b) \pm \sqrt{c^2 - 2c^2d + c^2d^2 - 2bc + 2bcd + b^2}}{2a}$$

$$x=\frac{-(c+cd-b)\pm\sqrt{(c-cd)^2-2b(c-cd)+b^2}}{2a}$$

$$x=\frac{-(c(+cd-b)\pm\sqrt{(c-cd-b)^2}}{2a}$$

$$x=\frac{-(c+cd-b\pm(c-cd-b)}{2a}$$ und endlich aber

$$\underline{x=\frac{b-c}{a}}$$ und auch $$\underline{x=-\frac{cd}{a}};$$

Man kann bey jeder quadratischen Gleichung die Sache allemal so betrachten, daß man die Hauptgleichung auf 0 reduzirt, und diese Größe als ~~aus~~ aus 2 Faktoren erzeugt betrachtet, welche ihre Wurzeln sind: z. B.

$$x^2\pm ax=\pm b$$

$$x^2\pm ax\mp b=0$$ und hieraus ist

$$x=\mp\tfrac{1}{2}a\pm\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2\pm b}$$

$$x\pm\tfrac{1}{2}a\mp\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2\pm b}=0$$

$$x\pm\tfrac{1}{2}a+\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2\pm b}=0$$ — X zirk.

$$x^2\pm\tfrac{1}{2}ax\cancel{-x\left(\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2\pm b}\right)}$$

$$\pm\tfrac{1}{2}ax+\tfrac{1}{4}a^2\mp\tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2\pm b}$$

$$\cancel{+x\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2\pm b}}\pm\tfrac{1}{2}a\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2\pm b}-\left(\tfrac{1}{4}a^2\pm b\right)$$

$$x^2\pm ax+\tfrac{1}{4}a^2-\tfrac{1}{4}a^2\mp b=0.$$

$$x^2\pm ax\mp b=0$$ wie oben.

Da nun diese Form allgemein war, so ist es auch die Folgerung eigen.

Wenn man also eine Größe hat von der man eine quadratische Gleichung, so wird man diese allemal in 2 Factoren zerlegen können, und wenn man die als eine gemischte quadratische Gleichung behandelt, u. wenn die Werthe der unbekannten Größe gefunden sind, so braucht man diese nur mit x verbinden, um zu ihnen die Factoren zu haben. (Diese Werthe heißen Wurzeln)

Wenn in der Gleichung zwei mehrere unbekannte Größen vorkommen, so wird man auch sie wie die einfachen Gleichungen behandeln, und ihre entweder eliminiren oder substituiren, je wie es am vortheilhaftesten ist.

Aufgabe

Die Summe 2er Zahlen u. ihrer Quadrate sind gegeben; man soll die Zahlen suchen:

$x + y = a \qquad x^2 + y^2 = b.$

$x = a - y; \qquad a^2 - 2ay + y^2 + y^2 = b.$

$$2y^2 - 2ay = b - a^2$$

$$y^2 - ay = \frac{b-a^2}{2}$$

$$y = +\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + \frac{b-a^2}{2}} = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{a^2 + 2(b-a^2)}{4}}$$

$$y = \tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{2b - a^2}$$

$y = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b-a^2}$ dies in $x+y=a$ gesetzt

$x + \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{2b-a^2} = a$ und

$x = \frac{1}{2}a \mp \frac{1}{2}\sqrt{2b-a^2}$

Macht man für die Gleichung $x+y=a$ die Probe so ist $x+y=a=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}a$; für $x^2+y^2=b$.

$$\tfrac{1}{4}a^2 \pm \tfrac{1}{2}a\sqrt{2b-a^2} + \tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}a^2 \mp \tfrac{1}{2}a\sqrt{2b-a^2} +$$
$$+\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{4}a^2 = \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}b = b$$

Eine andere Auflösung der Aufgabe ist folgende. Wir wissen aus Seite 76 hier, daß die größte Zahl aus der Summe und Differenz besteht und daß $\frac{s+d}{2} = x$. u. die kleinere Zahl $\frac{s-d}{2}$. Setzt man hier die Summe der Ganzen a so ist x die größere Zahl und $(a-x)$ die kleinere und

I $\frac{s+d}{2} + \frac{s-d}{2} = a$. hieraus $\left(\frac{s+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s-d}{2}\right)^2 = b$

$$\frac{s^2+2sd+d^2}{4} + \frac{s^2-2sd+d^2}{4} = b$$

$s^2+d^2=2b$; und der ersten Gleichung I wird $s=a$*

$a^2+d^2=2b$ und $d=\pm\sqrt{2b-a^2}$. setzt man

* dadurch wird auch a in die Gl. gebracht.

nun drückt d in der Grundgleichung so ist also

für die größere Zahl $x = \frac{f+d}{2} = \frac{a+d}{2} = \frac{a\pm\sqrt{2b-a^2}}{2}$

$x = \frac{1}{2}a \pm\frac{1}{2}\sqrt{2b-a^2}$ für die kleinere Zahl.

$$\frac{f-d}{2} = \frac{a-d}{2} = \frac{a\mp\sqrt{2b-a^2}}{2} = \frac{1}{2}a \mp\frac{1}{2}\sqrt{2b-a^2};$$

II Aufgabe

Das Produkt aus zwei Zahlen sowie der Summe ihrer Quadrate ist gegeben, man soll die Zahlen finden. also.

$$xy = a \quad ; \quad x^2+y^2 = b;$$

$$2xy = 2a \quad \text{und} \quad x^2+2xy+y^2 = b+2a \quad \text{und}$$

$$x+y = \pm\sqrt{b+2a}$$

so ist auch $x^2-2xy+y^2 = b-2a$ und

$$\left.\begin{aligned} x-y &= \pm\sqrt{b-2a} \\ x+y &= \pm\sqrt{b+2a} \end{aligned}\right\} \text{addirt}$$

$$2x = \pm\sqrt{b+2a} \pm\sqrt{b-2a}$$

$$x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b+2a} \pm\frac{1}{2}\sqrt{b-2a}$$

$$\left.\begin{aligned} x+y &= \pm\sqrt{b+2a} \\ -x+y &= \mp\sqrt{b-2a} \end{aligned}\right\} \text{subtrahirt}$$

$$2y = \pm\sqrt{b+2a} \mp\sqrt{b-2a}$$

$$y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{b+2a} \mp\frac{1}{2}\sqrt{b-2a};$$

2te Auflösung von $xy = a$ und $x^2 + y^2 = b$

$x = \frac{a}{y}$ also $\frac{a^2}{y^2} + y^2 = b$

$$a^2 + y^4 = by^2 = y^4 - by^2 = -a^2$$

eine höhere Gleichung von d. Form $x^{2n} \pm ax^n = b$ (Seite 189)

Man setze daher $y^2 = z$ so ist

$z^2 - bz = -a^2$ und nach der Hauptformel

$z = \frac{\mp N \pm \sqrt{N^2 \pm 4MP}}{2M}$ ist für $M = 1$; $N = b$; $P = -a^2$

ergibt daher

$z = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^2}$

da nun ferner $z = y^2$ ist, so ist:

$y^2 = \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^2}$ und

$y = \sqrt{\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^2}}$.

Oben war

$x^2 + y^2 = b$.

$x^2 = b - y^2 = b - \left(\frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}\sqrt{b^2 - 4a^2}\right)$ und hieraus

$x = \sqrt{\frac{1}{2}b \mp \sqrt{b^2 - 4a^2}}$;

Ist z.B. $a = 1175$; $b = 2834$ so ist

$x = 25$ und $x = 47$.

$y = 47$ u. $y = 25$. d.h. die eine Zahl ist allemahl 25 u. die andere 47.

3te Auflösung. Um auch die 4ten Grades Gleichung zu vermeiden, ist d. Summe u. Differenz der Größen zu suchen:

$xy = a \qquad x^2+y^2 = b.$

$\frac{s+d}{2} \times \frac{s-d}{2} = a \; ; \quad \left(\frac{s+d}{2}\right)^2 + \left(\frac{s-d}{2}\right)^2 = b.$

$s^2-d^2 = 4a \qquad \frac{s^2+2sd+d^2+s^2-2sd+d^2}{4} = b$

$\mathrm{I}\; s^2 = 4a+d^2 \qquad \mathrm{II}\; s^2+d^2 = 2b.$

Für s^2 den Werth in I.

$4a+d^2+d^2 = 2b = 4a+2d^2 = 2b.$

und $d^2 = b-2a \; ; \quad \underline{d = \pm\sqrt{b-2a}}$

in I den Werth für d^2, ist, da:

~~$s^2+(b-2a)^2 = 4b$~~

~~$s^2+b^2-2ab+4a^2 = 4b$~~

$s^2 = 4a+d^2$ war

$s^2 = 4a \pm b-2a = 2a+b$ und

$\underline{s = \pm\sqrt{2a+b}}$

Also in jenem Zahlen Beyspiel $d = \pm\sqrt{2834-2.1175} = \pm 22$

und $s = \pm\sqrt{2.1175+2834} = \pm 72$; also die größere Zahl

$\frac{72+22}{2} = \underline{47}$; und die kl. $\frac{72-22}{2} = \underline{25}$;

III Aufgabe.

Zwei Zahlen zu finden, deren Summe, deren Produkt und der Differenz der Quadrate gleich sein sollen.

$$I\ x+y = xy \qquad II\ xy = x^2-y^2$$

$$xy - x = y \qquad \frac{y^2}{y-1} = \frac{y^2}{(y-1)^2} - y^2$$

$$x = \frac{y}{y-1}; \qquad \frac{1}{y-1} = \frac{1}{(y-1)^2} - y; = \frac{1-(y-1)^2}{(y-1)^2}$$

$$y-1 = 1-(y-1)^2$$

$$y-1 = 1-y^2+2y-1$$

$$y^2-y = 1.$$

$$y = +\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{1+4} =$$

$$\underline{y = +\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}};$$

$$\frac{1}{y-1} = \frac{1}{(y-1)^2} - 1$$

$$1 = \frac{1}{(y-1)} - (y-1)$$

$$y-1 = 1-(y-1)^2$$

So war:

$$x = \frac{y}{y-1} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}}{-\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{-1 \pm \sqrt{5}}$$ und wenn man den Nenner rational macht nach (Seite 101) hier: zeigt

$$x = \frac{(1\pm\sqrt{5})(+1\pm\sqrt{5})}{(-1\pm\sqrt{5})(+1\pm\sqrt{5})} = \frac{6\pm 2\sqrt{5}}{4} = \underline{\tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5} = x}$$

~~Als Probe:~~ $\underline{x+y = 2\pm\sqrt{5}}$ Zur Probe:

$$x+y = (x-y)^2 = (x+y)(x-y) = x+y,$$ d. h.

$$x-y = 1; \quad \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5} - \left(\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\right) = 1$$

$$x+y = xy \qquad xy = x^2-y^2$$

$$xy - x = y \qquad xy = (x+y)(x-y)$$

$$x = \frac{y}{y-1} \qquad \frac{xy = x+y}{1 = x-y}$$

$$x = 1+y$$

$$\frac{y}{y-1} = 1+y$$

$$y = (1+y)(y-1) = (y^2-1)$$

also

$$y^2 - y = 1.$$ und

$$\underline{y = +\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}}.$$

Da $x = 1+y$ war, so ist

$$\underline{x = \tfrac{3}{2} \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{5}}$$

Es ist nun $xy = x+y$

$$xy = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5} = \underline{2 \pm \sqrt{5}}$$

und

$$x^2 - y^2 = \frac{9}{4} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} - \frac{1}{4} \mp \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{5}{4} = \underline{2 \pm \sqrt{5}}$$

Diese Aufgabe nun kann man auch so stellen: Zwey Größen zu finden deren Summe und Product einander gleich sind, deren Unterschied aber die Zahl 1 ist.

Obgleich nun in obiger Gleichung scheint es sey keine bekannte Größe darin, so sieht man wenn man folgende Aufstellung sich vornimmt, sogleich das Gegentheil.

$$x + y = xy$$
$$x + y = x^2 - y^2$$
$$x + y = (x+y)(x-y)$$
$$1 = x - y$$

Soll aus einer irrationalen zweytheiligen Größe $A \pm B\sqrt{C}$ die Quadrat $\sqrt{}$ gezogen werden, d.h. soll sie in Faktoren zerlegt werden, so kann man hier nicht nach den gewöhnlichen Regeln verfahren. Wenn z.B. $2+\sqrt{3}$ zum Quadrat erhoben wird, so werden die beiden entstehenden rationalen Größen zu,

$$\text{I} \quad A \pm B\sqrt{C} = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$\text{II} \quad x^2 + y^2 = A \quad \Big| \quad x = \pm\sqrt{A - y^2}$$

in die I Gl. hineingesetzt

$$A \pm B\sqrt{C} = A - y^2 \pm 2y\sqrt{A-y^2} + y^2$$
$$\pm B\sqrt{C} = \pm 2y\sqrt{A-y^2}$$
$$B^2C = 4y^2A - 4y^4$$
$$y^4 - Ay^2 = -\frac{B^2C}{4}$$
$$y^2 = \pm\sqrt{\frac{A^2}{4} - \frac{B^2C}{4}} + \frac{A}{2}$$
$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}}$$

dies in die II Gl. hineingesetzt.

$$X = \pm\sqrt{A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C} - \frac{A}{2}}$$
$$X = \pm\sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}}$$

Probe

$$y^2 = \frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}$$
$$x^2 = \frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}$$
$$x^2 + y^2 = A$$

$$2XY = \pm 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}\right)\left(\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}\right)}$$
$$= \pm 2\sqrt{\frac{1}{4}A^2 \mp \frac{1}{4}A\sqrt{A^2 - B^2C} \pm \frac{1}{4}A\sqrt{A^2 - B^2C} - \frac{A^2 + B^2C}{4}}$$
$$2XY = \pm 2\sqrt{\frac{1}{4}A^2 - \frac{A^2 + B^2C}{4}}$$
$$= \pm 2\sqrt{\frac{B^2C}{4}} = \pm B\sqrt{C}$$

Es ist also

$$A \pm B\sqrt{C}$$
$$\parallel$$
$$\left[\pm\sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}}\right]^2$$

zieht man die $\sqrt[2]{}$ heraus

$$\sqrt{A \pm B\sqrt{C}}$$
$$\parallel$$
$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}} \pm \sqrt{\frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}}$$

was die formel p. 201 ist.

zusammengezogen werden, und nur das doppelte Product eine irrationale Größe bleiben, denn $(2+\sqrt{3})^2 = 4+4\sqrt{3}+3 = 7+4\sqrt{3}$, woher sich erklären und dem letzten Ausdruck eine $\sqrt{\ }$ ziehen lassen muß, obgleich die Art der Entstehung der Operation verwischt ist. Allgemein sey also:

$$\alpha)\ \sqrt{A \pm B\sqrt{C}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \text{ so ist}$$

$$A \pm B\sqrt{C} = x \pm 2\sqrt{xy} + y$$

Wenn nun wie hier Theils rationale Theils irrat. Größen einander = sind so kann dieß nur geschehen wenn die rationale Theile unter sich, so wie die irrat. Theile sich gleich sind. Es ist also

$$\text{I}\quad A = x + y \quad \text{und} \quad \pm 2\sqrt{xy} = \pm B\sqrt{C} \text{ folglich ist}$$

$$4xy = B^2C$$

$$x = \frac{B^2C}{4y}$$

$$A = \frac{B^2C}{4y} + y = 4Ay = B^2C + 4y^2$$

$$y^2 - Ay = \frac{1}{4}B^2C$$

$$y = \frac{1}{2}A \pm \sqrt{\frac{1}{4}A^2 - \frac{1}{4}B^2C} = \frac{1}{2}A \pm \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}$$

aus I $\quad x = A - \frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}$.

$x = \frac{1}{2}A \mp \frac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}$; da sein die Wurzeln

{{ Eine zweitheilige irrationale Potenz in eine Wurzelbinom zu zerlegen

$$A \pm B\sqrt{C} = (x \pm y)^2$$

~~$\pm B\sqrt{C} = x \pm y - A$~~

~~$B^2 \cdot C = x^2 \pm 2xy + y^2 + A^2 - 2xA \mp 2yA$~~

~~$B^2C - A^2 =$~~

~~Dies ist dadurch ob das Bsp: nicht eine $B\sqrt{C}$ ist das doppelte Product der beiden Größen, und der $\sqrt{C}$ selbst irrat. die eine Größe ist so ist $B = 2x$ also $x = \frac{B}{2}$~~

~~$A = x^2 + (\sqrt{C})^2 = x^2 + C$~~

~~$x = \pm\sqrt{C - A} = \frac{B}{2} \mid C - A = \frac{B^2}{4}$~~

~~$A = \frac{B^2 - 4C}{4}$~~

Cf. 199.

Das Bsp: α eigentlich aus $A \pm B\sqrt{C} = (\sqrt{x} \pm \sqrt{y})^2$ entstanden indem man nicht hier den $\sqrt{\ }$ausdruck allein ob ist nicht nöthig das unbekannte Wurzelbinom als irrational anzunehmen. Das kann auch dann es ist zwar wahr daß man ein nomen rational ist, dann wird $\sqrt{x}$ auch zu demnach ausgedrückt werden, indeß, wenn ich $A \pm B\sqrt{C} = (x+y)^2$ annehme, so muß F p. 201

nur noch die Zeichen des 2t. Theils verschieden sind so kann er hier ein Zeichen weglassen daher:

$$\sqrt{A \pm B\sqrt{C}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2 - B^2C}}$$

diese Formel zerlegt also einen irrationalen Ausdr: in die Summe oder Diff 2er irrat: Ausdr:

Zum Beispiel:

$\sqrt{79 - 20\sqrt{3}}$ so wird in obiger Form

$A = 79$; $B = 20$; $C = 3$; und

$$\sqrt{79 - 20\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{79}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(79)^2 - 3(20)^2}} - \sqrt{\frac{79}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{79^2 - 3(20)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{79}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{6241 - 1200}} - \sqrt{\frac{79}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{6241 - 1200}}$$

$$= \sqrt{\frac{79}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5041}} - \sqrt{\frac{79}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5041}}$$

$$= \sqrt{\frac{79}{2} + \frac{71}{2}} - \sqrt{\frac{79}{2} - \frac{71}{2}} = \sqrt{\frac{150}{2}} - \sqrt{\frac{8}{2}}$$

$$= \sqrt{75} - \sqrt{4} = \underline{5\sqrt{3} - 2}.$$

Schluss ist: so wenn auch einer zweitheilig in Quadrate wenn der eine möglich der andere unmöglich ist die $\sqrt{\ }$ gezogen werden soll. als

$\sqrt{A \pm B\sqrt{-C}}$. Hier ist die Regel so zweytheilig sey und aus einem möglichen einem unmöglichen Theile bestehen. Es sey daher.

$$\sqrt{A \pm B\sqrt{-C}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{-y}\text{; so ist}$$

$$A \pm B\sqrt{-C} = x \pm 2\sqrt{-xy} \mp y\text{; und aus hier ist}$$

Es so muss der Werth für x und y zeigen, ob dieselben + oder − rational oder irrational, eben so möglich oder unmöglich ist, da x und y vollkommen Ausdrücke sind daher ist die folgende Rechnung überflüssig, denn $\sqrt{C} = \sqrt{-C}$ gesetzt, giebt für die Werthe von x und y die erforderlichen Werthe

I $A = x - y$ und II $B\sqrt{-C} = 2\sqrt{-xy}$ hieraus

$$-B^2C = -4xy = B^2C = 4xy$$

und $x = \frac{B^2C}{4y}$ und in I also

$$A = \frac{B^2C}{4y} - y = 4Ay = B^2C - 4y^2 \text{ und}$$

$$y^2 + Ay = B^2C$$

$$\underline{y = -\tfrac{1}{2}A \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}} \text{ daraus in I.}$$

$$x = A - \tfrac{1}{2}A \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C} = +\underline{\tfrac{1}{2}A \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}}$$

der Unterschied liegt also bloß im ± vor $\frac{1}{2}A$.
Da nun jede unmögliche Größe negativ unter d. √
zweien Werth ist so steht:

$$\sqrt{A \pm B\sqrt{-C}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}A \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}A \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}}$$

Hier die Anwendung:

$$\underline{\sqrt{A \pm B\sqrt{-C}} = \sqrt{\tfrac{1}{2}A + \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}} \pm \sqrt{\tfrac{1}{2}A - \tfrac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2C}}}$$

Beispiel.

$\sqrt{4 \pm 16\sqrt{-3}}$ hier ist. $A = 4$; $B = 16$; $C = 3$

$$\sqrt{4 \pm 16\sqrt{-3}} = \sqrt{2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{16+768}} \pm \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{16+768}};$$

$$= 2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{784} \pm \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}\sqrt{784}};$$

$$= \sqrt{2 + \tfrac{1}{2}28} \pm \sqrt{2 - \tfrac{1}{2}28} = \sqrt{16} \pm \sqrt{-12};$$

$$= \underline{4 \pm 2\sqrt{-3}}$$

Wenn nun in der Anwendung mehrere rationale od. unmögliche Größen hier vorkommen, so wird man die Summe derselben als A [illegible], und aber so den A der unmöglichen Größe multiplicirten Faktor t B bezeichnen

3) $y = \sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} - c - \sqrt{-\frac{4a^2b^2}{c}}}$; hier wird A.

$A = \frac{a^2b^2}{c^2} - c$; $B = 1$; $C = \frac{4a^2b^2}{c}$;

$$y = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} - c\right)^2 + \frac{4a^2b^2}{c}}} \pm \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} - c\right)^2 + \frac{4a^2b^2}{c}}}$$

Den ersten Theil der Gleichung $= \alpha$ setzt man den 2ten $= \beta$.

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^4}{c^4} - \frac{2a^2b^2}{c} + c^2 + \frac{4a^2b^2}{c}}}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^4b^4}{c^4} + \frac{2a^2b^2}{c} + c^2}} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2b^2}{c^2} + c\right)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c + \frac{a^2b^2}{2c^2} + \frac{1}{2}c} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2}} = \cancel{\sqrt{}}\ \underline{\frac{ab}{c}} = \alpha$$

den zweiten Theil β.

$$\beta = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c - \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{a^2b^2}{c^2} - c\right)^2 + \frac{4a^2b^2}{c}}} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c - \frac{a^2b^2}{2c^2} - \frac{1}{2}c}$$

$\beta = \sqrt{-c}$ und da $y = \alpha + \beta$.

$\underline{y = \frac{ab}{c} - \sqrt{-c}}$; durch die Probe kann ich leicht von der Richtigkeit überzeugen.

Es stellte hier ein Fall gegeben: würden nur die unmöglichen Größen keinen Faktor hat sonst würde ich d. Aufgabe [illegible] gleichmäßig in $y = \sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} - c \pm 2ab\sqrt{-\frac{1}{c}}} = \sqrt{\frac{a^2b^2}{c^2} - c - \frac{2ab}{\sqrt{c}}\sqrt{-1}}$ folgen.

Von den unbestimmten Gleichungen.

Enthalten Aufgaben nicht mehr od. weniger Bedingungen als zur Bestimmung d. unbekannten Größen nöthig sind, so heißen sie bestimmte Aufgaben.

Enthalten sie nicht so viel Bedingungen oder nicht so viel Gleichungen, als unbekannte Größen enthalten sind, so daß man am Ende zuletzt eine Schlußgleichung erhält, welche aber nicht blos durch bekannte Größen bestimmt wird, sondern mehrere unbekannte Größen enthält, so heißen sie unbestimmt.
Als Verstandesübung gut. u. in Anwendung selten vor. u. nur zu Auflösung speculativer Fragen behalten sie einen großen Werth [Eulers kleine Analysis]. –
Sind endlich 3tens mehr Bedingungen gegeben als zur Auflösung nothwendig sind, so sind die Aufgaben mehr als bestimmt, und sind in ihren Bestimmungs-Bedingungen die z. B. mehr als eine Größe begreifen, so werden sie ungereimt u. unmöglich.

Was nun das Problem der unbestimmten Gleichungen betrifft, so stellt sich selbige eine unbestimmte Zahl

von

von Gleichungen gestellt, doch schränkt man sich gewöhnlich nur auf ganze Zahlen ein, wenn die Aufgabe sich unmöglich machen (d. zero + Zahlen). können aber nur Brüche vorkommen so verlangt es sich in der Regel nur + die positiven ganzen Grenzen liegend.

Solche Gleichungen können im Allgemeinen nur folgende 4 Hauptformen haben, als:

$$\mathrm{I}\quad y = A \pm Bx$$

$$\mathrm{II}\quad y = \frac{A}{C} \pm Bx$$

$$\mathrm{III}\quad y = \frac{Bx}{A}$$

$$\mathrm{IV}\quad y = \frac{Bx \pm C}{A}\;;$$

Soll nun y eine + ganze Zahl seyn, unter der Voraussetzung daß A, B, C ganz sind; wie ist x beschaffen seyn?

denn $\frac{A}{C} \pm BX = \frac{A \pm BCX}{C}$ die Summe $A \pm BCX$ ist also nie durch C divisible, wenn A durch C, nicht divisible ist.—

$$\underline{\mathrm{I}\quad y = A \pm Bx.}$$

1. $A + Bx = y = +$ wenn x eine ganze + Zahl ist. [illegible]

2. $A - Bx = y$; hier ist $A > Bx$ seyn und also $x < \frac{A}{B}$;

$$\underline{\mathrm{II}\quad y = \frac{A}{C} \pm Bx.}$$

Hier hängt es davon ab: ob $\frac{A}{C}$ sich durch eine ganze Zahl darstellen läßt, und nur in diesem Falle ist es möglich y durch eine ganze Zahl auszudrücken. ist x + so wird dann

39

Ist C durch A divisible, so muss für x, nA genommen werden, wodurch y eine ganze Zahl wird. Ist B durch A divisible, so wird $nx \pm \frac{C}{A}$ welches der Bruch [illegible] unverändert muss, wenn x eine ganze Zahl bleiben soll

$$\text{IV}\quad y = \frac{Bx \pm C}{A}$$

ist A, B, C, durch A oder B, oder C oder durch einen gemeinschaftlichen factor μ divisibel, so wird der Bruch gehoben und folglich die form $y = \frac{x \pm m}{n}$ so muss, wenn y eine ganze Zahl seyn soll $x =$ einem Werth seyn a, so dass $a \pm m = \mu n$

$$a = \mu n \mp m$$

wo y immer $= \mu$ ist dann

$$y = \frac{\mu n \pm m \mp m}{n} = \mu$$

bleibt aber die form $\frac{Bx \pm C}{A}$ und ist $A > B$, und dann muss wenn y eine ganze Zahl bleiben soll $x = a$ so dass

$$aB \pm C = \mu A \text{ also}$$

$$a = \frac{\mu A \mp C}{B}$$ wo B in [illegible] einen Zähler enthält, dann da $aB = \mu A \mp C$, und aB ein Vielfaches von B ist so muss auch $\mu A \mp C$ ein Vielfaches von B seyn, und zwar ist die

[illegible] y + [illegible], [illegible] $-Bx$ [illegible] y [illegible] + wenn $\frac{A}{C} > Bx$ ist und also $x < \frac{A}{BC}$;

$$\text{III}\quad y = \frac{Bx}{A}$$

[illegible] ein [illegible] statt finden, wenn nämlich [illegible] ganze Zahl [illegible], so kann x eine jede beliebige Zahl seyn. z.B. $y = \frac{32x}{8} = 4x$. [illegible] allemal die [illegible] z.B. $y = \frac{7x}{31}$

und $x = 31; = 2.31. = 3.31.$ $y = \frac{7.31.x}{31.} = 7x$ $\frac{7.31.2}{31} = 14.$

Allgemein $y = \frac{Bx}{A}$ ist $x = nA$, so ist $y = \frac{BnA}{A} = Bn$ wird.

$$\text{IV.}\quad y = \frac{Bx \pm C}{A}$$

[illegible] $A > B$ [illegible] Cf. p. 209. [illegible]

[illegible] ist $y = \frac{x \pm \frac{C}{B}}{\frac{A}{B}}$; [illegible] nun $\frac{C}{B} = a$

und $\frac{A}{B} = b$ so ist $y = \frac{x \pm a}{b}$, und hier kommt es nur darauf an daß n eine Zahl sei. x nimmt aber daß $x \pm a$ immer durch b theilbar wird. und dies kann geschehen wenn $(x \pm a)$ ein vielfaches von b werden soll. so ist nämlich $x + a = nb$ oder $x = nb - a$; und dann auch $x - a = nb$, $x = nb + a$. Also man wird einen Bruch erreichen wenn man b mit einer ganzen Zahl x zieht und $a = \frac{C}{B}$ zum Product addirt oder subtrahirt, wo dann n den Werth von y giebt.

$y = \frac{na}{a} = n$

37. $y = \frac{6x \pm 24}{42}$ so ist $y = \frac{x \pm 4}{7}$ [illegible]

$a = 4$ $b = 7$. Hier $x = n7 - 4$ u. $x = n7 + a$.

[illegible] $n = 1, 2, 3$ [illegible] $x = 7 + 4 = 11$

$x = 7 - 4 = 3$ [illegible]

$x = 14 - 4 = 21 - 4 = 28 - 4$

$x = 14 + 4 = 21 + 4 = 28 + 4$

also $y = \frac{60 + 24}{42} = 2$; $y = \frac{102 + 24}{42} = 3$

u. $y = \frac{108 - 24}{42} = 2$. $y = \frac{150 + 24}{42} = 3$.

$a = -\ -\ +\ -\ +\ -\ +\ +$

$n = \underbrace{3, 10, 11, 17}, 18, 24, 25, 32$ etc

$y = 1, 2, 1, 3, 2, 4, 3, 4$

Wenn aber die ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~ der soll daß $\pm C$ u. A also [illegible] dividirt haben [illegible], so haben sie vielleicht einen gemeinschaftlichen Theiler, und dieß [illegible] [illegible] werden, wie wenn $y = \frac{8x \pm 28}{36} = \frac{2x \pm 7}{9}$ [illegible]. Ist er nun [illegible] die Gleichung [illegible] so kann [illegible] nach 2 von diesen Zahlen

Quotient $= a$ ⌐

Ist $A < B$, so theilt man $\frac{Bx \pm C}{A}$ in $\frac{Bx}{A} \pm \frac{C}{A}$ hierauf $\frac{Bx}{A}$ das Ganze wodurch sich der Bruch verwandelt in $y = nx + \frac{bx \pm C}{A}$, wo mit dem Bruche wie vorher verfahren wird

$x = nb \mp a$

$y = \frac{nb \mp a \pm a}{b} = n$

⌐ Nun ist aber a nicht nothwendig eine ganze Zahl. Sie ist vielmehr öfters ein Bruch. Soll aber a oder x eine ganze Zahl sein, dann muß der $a = \frac{\mu A \mp C}{B}$ ist $\mu A \mp C = \nu B$ sein dessen statt μx $\mu = \frac{\nu B \pm C}{A}$ dies in a [illegible] ersetzt giebt $a = \frac{\left(\frac{\nu B \pm C}{A}\right) A \mp C}{B}$

$a = \nu$

Was zu keinem Resultate führt, weil nur die Bruchform [illegible] abschaffen können. Dieser muß in diesem Falle [illegible] [illegible] das Verfahren [illegible] werden.

einen gemeinschaftlichen Factor enthalten, soll aber eine ganze Zahl seyn, d. Voraussetzung $\overset{\text{A größer}}{A > B}$ ist, da Nenner u. d. Zähler von x noch keinen gemeinschaftlichen Theiler nicht haben. nachdem man nämlich eine Zahl durch ihren größten gemeinschaftlichen Theiler getheilt [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] Zahlen unter [illegible]. Man sieht wenn hier x eine ganze [illegible] a, und nimmt man [illegible] eine [illegible] daß y eine ganze Zahl ist, so ist wenn $y = \frac{Ba \pm C}{A} = b =$ ganze Zahl ist,

Klarer wird dieser Widerspruch auf folgende Weise: $\frac{BX \pm C}{A}$, ist darin B und A durch n theilbar so ist BX nie [illegible] von irgend einer Größe G [illegible] dividirt werden durch C verderben, weil ab und [illegible] A nicht divisible ist, daher Zähler und Nenner nicht [illegible] mehr divisible, und die Bruchform unvermeidlich

$$\frac{Ba \pm C}{A} = b$$

$$Ba \pm C = bA$$

$$\pm C = bA - Ba$$

Weil es nun an sich A u. B noch einen gemeinschaftlichen Theiler haben, welcher hier μ heißen mag, so ist $A = \mu D$ u. $B = \mu E$ und so ist

$$\pm C = b\mu D - a\mu E,$$ und

$$bD - aE = \pm \frac{C}{\mu}.$$

Da nun nach d. Voraussetzung C keinen gemeinschaftlichen Theiler mit A u. B hatte, so ist $\frac{C}{\mu}$ ein Bruch, [illegible] ein Widerspruch, weil der Voraussetzung nach C eine ganze Zahl ist. Sind daher A u. B relative Primzahlen, so ist y nie eine ganze Zahl.

Hier war nun die Voraussetzung daß $A > B$ sey; wie und es der Fall, so sei z. B.

$$y = \frac{59x \pm 7}{11}$$

$$11y = 59x \pm 7$$

$$x = \frac{11y \mp 7}{59}$$

d. h. man kennt den Werth von so daß man statt dem einen Werth auch den andern sucht.

oder man setzt: bey

$$y = \frac{59x \pm 7}{11}\,;\; y = 5x + \frac{4x \pm 7}{11}$$ d. h.

man dividirt den Faktor von x durch den Nenner und macht aus dem Ganzen einen 2 theiligen Ausdruck.

Um nun zu bestimmen was für x für eine Zahl gesetzt werden muß, um einen Werth von y zu erhalten der eine ganze Zahl ist, wird man nun die Lehre von den Kettenbrüchen in Anwendung bringen. Wenn man nämlich auf die schon oben angegebene Art z. B. den Bruch $\frac{A}{B}$ wo man den ganzen Nenner als Zähler, u. ~~für~~ den Faktor von x als Nenner angenommen hat, in ganze Reihe der Quotienten entwickelt, so wird man wenn man statt die letzten Kettenbruch entwickelt, wiederum wie schon oben angemerkt einen Zähler = A', und einen Nenner = B' erhalten.

Hat man z. B. erhalten $y = \frac{286x + 806}{1099}$

so ist $A = 1099$; $B = 286$; u. $C = 806$;

behandelt man nun den Bruch wie angegeben, so ist

286
1099 | 3
838
241 | 1.
286
241
45 | 5
241
225
16 | 2
45
32
13 | 1
16
13
3
13 | 4
12
1
3 | 3
3
0

Quotient.	Zähler	Nenner
	1	0
3	3	1
1	4	1
5	23	6
2	50	13
1	73	19
4	$342 = \gamma$	$89 = \delta$
3	$1099 = A$	$286 = B$

Eine solche Operation kann man nur in allen solchen Gleichungen vornehmen wo jene Bedingungen obwalten und berechnet dann die Näherungswerthe des angegebenen Bruchs bis zum vorletzten Zähler welcher γ u. dessen Nenner δ heißen soll. Hat man γ auf diese Art bestimmt u. multiplicirt es mit der ganzen bestimmten Zahl C, so wird man ein Quot. erhalten wenn man das Product durch die ganze Zahl A dividirt, welcher eine gerade Zahl und einen Rest bestehen kann. also

$$\frac{Cy}{A} = Q + \frac{R}{A};$$

worin Q ebenfalls $= 0$ werden kann wenn $A > Cy$

Ist nun eine ähnliche Gleichung gegeben, so man soll eine Zahl bestimmen welche man für x setzen muß so darf er nur noch unterscheiden ob die Gleichung der Form nach $y = \frac{Bx+C}{A}$ od. $y = \frac{Bx-C}{A}$ und ferner ob y durch eine gerade od. ungerade Anzahl v. Quotient bestimmt wurde.

Mit Beobachtung dieser Unterschiede ist das praktische Verfahren allemal folgendes.

I. Ist $y = \frac{Bx+C}{A}$ gegeben und

a) der Zähler y etc. eine gerade Anzahl Quotienten bestimmt worden so ist $x = A - R$.

b) ist aber y durch ungerade Anzahl Quot. entstanden so ist $x = R$:

d.h. im ersten Falle soll statt x eine Zahl folgen wenn er vom Nenner den obigen Rest abzieht, u. im 2t. Fall der Rest selbst.

II. Ist $y = \frac{Bx-C}{A}$ gegeben und

a) die Anzahl d. Quot. [illegible] gerade so ist $x = R$.

iſt b) die Anzahl d. Quot. ungerade ſo iſt
$x = A - R$ genommen werden [illegible].

Zuförderſt die Praktiſche; dann die Theoretiſche.

Im obigen Beiſpiel iſt gegeben. $y = \frac{Bx + C}{A}$ alſo

I.) $y = \frac{286x + 806}{1099}$. darin iſt $A = 1099$; $B = 286$
$C = 806$ und nach den aufgeſuchten Beiſpiele $\gamma = 342$
die einem geraden Quotient (d 6te) bezeichnet. alſo iſt

$$\frac{\gamma C}{A} = \frac{342 \times 806}{1099} = Q + \frac{R}{A} = \frac{275652}{1099} = 250 + \frac{902}{1099}$$

u alſo $R = 902$. Es iſt alſo nach I. a.

$x = A - R$; $x = 1099 - 902 = 197$ u daraus

$$y = \frac{286 . 197 + 806}{1099} = \frac{56342 + 806}{1099} = \frac{57148}{1099} = 52.$$

welches durch eine ganze Zahl ausgedrückt

iſt $y = \frac{286x - 806}{1099}$
ſo iſt $R = 902$
alſo $y = \frac{286 . 902 - 806}{1099}$
$y = \frac{257972 - 806}{1099}$
$y = \frac{257166}{1099} = 234.$

Iſt dagegen
b) $y = \frac{183x + 127}{520}$ alſo $A = 520$; $B = 183$; $C = 127$.

ſo wird $\frac{A}{B} = \frac{520}{183}$

183 | 520 | 2
366
154 | 1
183
154
29 | 5
154
145
9 | 3
29
27
2 | 4
9
8
1 | 2
2
2
0

Quot.	Zähler	Nenner
	1	0
2	2	1
1	3	1
5	17	6
3	54	19
4	$233 = \gamma$	$82 = \delta$
2	$520 = A$	$183 = B$

Hier also ist durch 5 Koeffizienten bestimmt $\gamma = 233$

und $\frac{\gamma C}{A} = Q + \frac{R}{A}$; $= \frac{233.127}{250} = \frac{29591}{250} = Q + \frac{R}{A}$

$= 56 + \frac{471}{520}$ u. also $R = 471 = x$ (ungerade Quot.) u. also:

$y = \frac{183.471+127}{520} = \frac{86193+127}{520} = \frac{86320}{520} = 166$ und

wie verlangt werden eine ganze Zahl.

Wenn nun nach II in der Gleichungsformel $+C = -C$ ist, so

gelten die II gegebenen Regeln a u. b. 76.

$y = \frac{47x-1331}{252}$ so wird $A = 252$; $B = 47$; u. $C = 1331$;

$\frac{A}{B} = \frac{252}{47}$ also

```
   47 | 5
  252 |
  233 |
 - 17 | 2
   47 |
   34 |
 - 13 | 1
   17 |
   13 |
  - 4 | 3
   13 |
   12 |
  - 1 | 4
    4 |
    4 |
    0
```

Quot.	Zähler,	Nenner.
3	1.	0.
5	5.	1.
2	11.	2
1	16	3
3	$59 = \gamma$	$11 = \delta$
4	$252 = A$	$47 = B$.

Darnach ist diese eine gerade Zahl Quot. bestimmt ist 4;

u. daher $x = R \mp \frac{\gamma C}{A} = \frac{59.1331}{252} = \frac{78529}{252} = 311 + \frac{157}{252}$ u.

also $x = 157$. darauf $y = \frac{Bx - C}{A} = \frac{47.157 - 1331}{252} =$

$\frac{7379 - 1331}{252} = \frac{6048}{252} = \underline{24} =$ einer ganzen Zahl

wie wir verlangten.

Ist dagegen $y = \frac{202x - 39}{467}$ gegeben, so wird

$A = 467$; $B = 202$; $C = 39$; u. $\frac{A}{B} =$

$$
\begin{array}{r|l}
202 & \\
-467 & 2 \\
404 & \\
\hline
-63 & 3 \\
202 & \\
189 & \\
\hline
-13 & 4 \\
63 & \\
52 & \\
\hline
-11 & 1 \\
13 & \\
11 & \\
\hline
-2 & 5 \\
11 & \\
10 & \\
\hline
-1 & 2 \\
2 & \\
2 & \\
\hline
0. &
\end{array}
$$

Quotient.	Zähler	Nenner
	1.	0
2	2	1
3	7	3
4	30	13
1	37	16
5	$215 = \gamma$	$93 = \delta$
2	$467 = A$	$202 = B$

Hier ist γ aus ungeraden Quotient entstanden daher $x = A - R$; $\frac{\gamma C}{A} = Q + \frac{R}{A}$;

$\frac{215 \cdot 39}{467} = \frac{8385}{407} = 17 + \frac{446}{467}$ u. also $R = 446$. daher

$x = 467 - 446 = 21$ und endlich

$y = \frac{21 \cdot 202 - 39}{467} = \frac{4203}{467} = 9.$

Der Beweis dieser durch Beyspiele erläuterten Regeln wird sich nun auch auf vier Fälle erstrecken müssen, da wir 4 Regeln erhalten haben. Das allein wird aber nur zu zeigen, daß die Größe R durch $\frac{\gamma C}{A}$ bestimmt wurde, ist nun aber:

$\frac{\gamma C}{A} = Q + \frac{R}{A}$ daher; $R = \gamma C - AQ$.

Man nenne die Näherungsbrüche zurück. Bei unserm ersten Beispiel waren

Quot	Zähler	Nenner
	1	0
3	3	1
1	4	1
5	23	6
2	50	13
1	73	19
4	342	89
3	1099	286.

Bekannt ist daß

1) der 1te Näherungsbruch zu ~~groß~~ klein, der 2te ~~klein~~ groß u. s. f. ist.

2) daß man jeden Näherungsbruch als gegebenen Hauptbruch ansehen werden kann, und dann die vorhergehenden Näherungsbrüche als zu diesem Hauptbruch gehörig gerechnet werden ~~[illegible]~~ dürfen.

3) daß aus den vorhergehenden Zähler und Nenner nebst dem folgenden Quotienten der folgende Zähler und Nenner berechnet wird; daß wenn man den ersten Bruch $\frac{\alpha}{\beta}$ den folgenden $\frac{\gamma}{\delta}$ setzt, daß der folgende welcher als Hauptbruch angesehen werden kann mit A u. B bezeichnet werde, daß man also wenn man z. B. den Bruch $\frac{23}{6}$ als Hauptbruch ansehen will ihn mit A u. B bezeichnet, u. daß man hieraus

$\alpha = 3$; $\beta = 1$; $\gamma = 4$; $\delta = 1$; $A = 23$; $B = 6$ setzen kann u. s. w.

4) daß ein Näherungsbruch von einem vorhergehenden abgezogen einen Bruch gibt, dessen Zähler immer Eins ist, u. dessen Nenner das Produkt der beiden betreffenden Nenner war, so daß $\frac{\gamma}{\delta} - \frac{A}{B} = \frac{\gamma B - A\delta}{\delta B} = \frac{\pm 1}{\delta B}$ war. Hier mögen folgen.

1) $\frac{3}{1} - \frac{4}{1} = -\frac{1}{1}$

2) $\frac{4}{1} - \frac{23}{6} = \frac{24-23}{6} = \frac{+1}{6}$

3) $\frac{23}{6} - \frac{50}{13} = \frac{299-300}{78} = \frac{-1}{78}$

4) $\frac{50}{13} - \frac{73}{19} = \frac{950-949}{247} = \frac{+1}{247}$

5) $\frac{73}{19} - \frac{342}{89} = \frac{6497-6498}{1691} = -\frac{1}{1691}$

6) $\frac{342}{89} - \frac{1099}{286} = \frac{97812-97811}{25454} = \frac{+1}{23454}$

Sieht man nun auf d. Gesetz d. Vorzeichenfolge, so bemerkt man daß bei der hier gemachten Bedingung, daß der Nenner kleiner als d. Zähler [illegible] ein [illegible] Bruch zum Grunde gelegt ist, so wird da der erste Näherungsbruch zu ~~groß~~ klein, der 2te zu ~~klein~~ groß u. s. w. † auch bei 1) $\gamma B < \delta A$ ‡ also wenn γ kleiner als ihr Zähler sind. $\gamma B - \delta A = -1$.

bei 2) $\gamma B > \delta A$, u. $\gamma B - \delta A = +1$

bei 3) $\gamma B < \delta A$ u. $\gamma B - \delta A = -1$

4) $\gamma B > \delta A$ u. $\gamma B - \delta A = +1$ u. s. w.

Das folgt also wenn ich einen geraden vom ungeraden Näherungsbruch abziehe, eine -1 als Rest im Zähler ergibt.

† so daß immer die der Ordnung nach geraden Brüche zu groß, die ungeraden zu klein

‡ denn $\frac{\gamma}{\delta} < \frac{A}{B}$ als ungerader Bruch gegen einen geraden, also $\frac{\gamma B < \delta A}{\delta B}$

und umgekehrt γ_1.

Nun ist der hier folgende Beweis leicht zu ~~führen~~ übersehen.

Der Lehrsatz war $y = \frac{Bx \pm C}{A}$, wo ~~über~~ fest 2 Bedingungen durch das ± Zeichen u. ~~frei~~ jeden einzelnen Fall Beweis auf y det gerade u. ungerade Angest Quot. natürlich zeigen, daher wird 2 Fälle.

Wenn also..

I $y = \frac{Bx+C}{A}$ und y durch einen gerade Angest Quot. entstand, so sollte x = A − R genommen werden, substituirt

$$y = \frac{B(A-R)+C}{A} = \frac{AB - BR + C}{A}$$ aber war nun

$R = \gamma C - AQ$ (Seite 215) daher:

$$y = \frac{AB - B(\gamma C - AQ) + C}{A} = \frac{AB - B\gamma C + ABQ + C}{A} =$$

$$= B + BQ + \frac{-\gamma BC + C}{A} = B + BQ - \frac{\gamma BC + C}{A};$$

Da nun hier B u. BQ ganze Zahlen sind, so bleibt nur zu untersuchen ob $\frac{\gamma BC + C}{A}$ auch eine ganze Zahl ist.

Es wurde hier A eine gerade Angest Quot. bezeichnet, u. dann war: $\gamma B - \delta A = +1$, u. also auch

$\gamma BC - \delta AC = C$,

$\gamma BC - C = \delta AC$. in obigen Lehrsätze Bruch gezählt

so ist $\frac{\gamma BC - C}{A} = \frac{\delta AC}{A} = \delta C$; somit war nun

$y = B + BQ - \delta C$, und da nun δ der Nenner ganz

Es kann $-\frac{\gamma BC + C}{A} = +\left(\frac{C + \gamma BC}{A}\right)$

$= -\left(\frac{\gamma BC - C}{A}\right) = -\delta C$

Nachdem aber $\frac{C}{\delta}$ ist, so ist es eine ganze Zahl und

mithin $y =$ einer ganzen Zahl.

zu I. b. wenn γ die ungerade Anzahl Quot. bezeichnet (sind

denn war aber $\gamma B - \delta A = -1$; und $x = R$.

$$y = \frac{BR + C}{A} = \frac{B(\gamma C - AQ) + C}{A} = \frac{\gamma BC - ABQ + C}{A} =$$

$= -BQ + \frac{\gamma BC + C}{A}$, da nun $\gamma B - \delta A = -1$ war, ist

$\gamma BC - \delta AC = -C$ und

$\gamma BC + C = \delta AC$, daher.

$y = -BQ + \frac{\delta AC}{A} = \delta C - BQ$ einer ganzen Zahl

II Hauptfall.

a) $y = \frac{Bx - C}{A}$ u. γ eine gerade Anzahl v. Quot.:

so ist $x = R$.

$$y = \frac{BR - C}{A}; = \frac{B(\gamma C - AQ) - C}{A} = \frac{B\gamma C - ABQ}{A}$$

$= -BQ + \frac{B\gamma C - C}{A}$.

Denn γ gerade Anzahl war; so ist nun wieder $\gamma B - \delta A = 1$

$\gamma BC - \delta AC = C$, u. $\gamma BC - C = \delta AC$. daher

$y = -BQ + \frac{\delta AC}{A} = \delta C - BQ =$ ganze Zahl.

b) $y = \frac{Bx - C}{A}$ u. γ die ungerade Zahl Quotient

war $x = A - R$. und daher. $y = \frac{B(A - R) - C}{A} =$

$$= \frac{BA - BZ - C}{A} = \frac{BA - B(\gamma C - AQ) - C}{A} =$$

$$= \frac{BA - B\gamma C + ABQ - C}{A} = B + BQ - \frac{B\gamma C + C}{A}.$$

da hier δ ungerade war, so ist

$\gamma B - \delta A = -1$. & $\gamma BC - \delta AC = -C$;

$\gamma BC + C = \delta AC$, daher

$y = B + BQ - \frac{\delta AC}{A} = B + BQ - \delta C$. eine ganze Zahl. —.

Diese hier gegebene Art den x zu bestimmen ist aber ungemein weitläufig, & die Ausdrücke werden, A zu viel Glieder, zu sehr zusammengesetzt. daher werde ich mich lieber folgender kürzeren Methode & der Anwendung bedienen.

Gegeben. $y = \frac{47x - 1331}{252}$.

Soll für y eine ganze Zahl folgen, so verstattet diese Methode daß man den Nenner so auszudrücken sucht, daß er kleiner als der Factor von x werde, dies kann leicht durch Umkehrung der Gleichung geschehen, denn ~~muß~~ kann man aber unbedingt die Gleichung so stellen, daß gewisse Ganze von x, oder überhaupt die unbekannte Größe ausdrücken, und dann ein Bruch bleibt den man wiederum durch eine ganze Zahl ausdrücken kann, & so fortfahren bis alle Brüche weg,

Dieser Beweis genügt wohl die Einsicht zu erhalten, daß wenn man statt x, den vorgegebenen Werth setzt, für y eine ganze Zahl herauskommt, allein wie gewiß mußten wir darauf gekommen ist, diesen Werth statt x zu setzen, und warum man gerade diesen und keinen andern Werth setzen kann. Es ist ein Unverständlichkeit, ein Glaubensartikel. Ein gewisses Licht, wie man zu dieser Verfahrungsart gekommen ist, verbreitet aber die folgende Betrachtungsweise A

B

x

schwunden sind. z. B.

$$y = \frac{47x - 1331}{252}$$

$$x = \frac{252y + 1331}{47} = 9y + 28 + \frac{17y + 15}{47}$$, diesen

Setzt $\frac{17y+15}{47} = A$. so ist $y = \frac{47A - 15}{17}$.

$$x = \frac{252y + 1331}{47}$$

$y = 2A + \frac{13A - 15}{17}$; $\frac{13A - 15}{17} = B$; $A = \frac{17B + 15}{13}$.

$A = B + 1 + \frac{4B + 2}{13}$; $\frac{4B+2}{13} = C$; $B = \frac{13C - 2}{4}$;

$B = 3C + \frac{C - 2}{4}$; $\frac{C-2}{4} = D$. ; $C = 4D + 2$.

$C = 4D + 2$.

die Nenner müssen bei dieser Operation wie leicht zu übersehen ist stets kleiner werden, bis endlich die Brüche ganz wegfallen, und C eine durch D bestimmte ganze Zahl wird.

Substituirt man rückwärts für D angenommene Werthe so ist:

für D	$\underbrace{1}$	C	$\underbrace{4}$	B.	$\underbrace{13}$	A.	$\underbrace{17}$	y	$\underbrace{47}$	x	$\underbrace{252}$,
= 0		2		6		9		24		157.	
= 1		6		19		26		71		409	
2		10		32		43		118		661	
3		14		45		60		165		913.	
4		18		58		77		212		1165	
5		22		71.		94		259		1417.	

So

So ist es nun völlig einerley ob x durch y, od. y durch x bestimmt würde, da man immer eine ganze Zahl für y erhält, welche der Aufgabe entspricht.

Betrachtet man diese Columnen D, C, B u. s. w. so wird man in ihnen merkwürdige Reihen finden, die bey D um 1, bey C um 4, bey B um 13, bey A um 17, bey y um 47, und bey x um 252 fortschreiten. Sie also weiter zu entwickeln ist leicht. Man bemerkt ferner daß diese Fortschreitung in der Columnen allemal mit dem Nenner des Bruchs durch welchen die Columne bestimmt wurde, einerley, und ist dies ein nothwendiger Erfolg, indem der Bruch eine ganze Zahl geben soll, und also nur durch Hinzufügung des einfachen od. mehrfachen Nennerwerthes in ganze gebracht werden kann. Setzt man längere Columnen entwickeln, so kann man auch kürzer verfahren, indem man überall die Substitution anbringt:

$C = 4D + 2.$

$B = 12D + 6 + \frac{4D + 2 - 2}{4} = 13D + 6.$

$A = 13D + 6 + 1 + \frac{52D + 24 + 2}{13} = 13D + 7 + 4D + 2 = 17D + 9$

$y = 34D + 18 + \frac{221D + 117 - 15}{17} = 34D + 18 + 13D + 6 = 47D + 24.$

$x = \frac{11844D + 6048 + 1331}{47} = 252D + 157.$ Setzt man nun hier

$D = 5$ z. B. so wird $\left.\begin{array}{l} y = 5.47 + 24 = 259 \\ x = 5.252 + 157 = 1417 \end{array}\right\}$ wie oben;

Beyspiele der unbestimmten Aufgaben.

Jemand hat 3 Sorten Wein, wovon der Eimer A kostet 12 fl. von B. 10 fl. von C. 6 fl. Er will eine Mischung machen von 60 Eimern, wovon der Eimer 9 fl. kostet.

x sey die Anzahl von der Sorte A.
y … B.
z … C.

$x + y + z = 60$ und $12x + 10y + 6z = 9.60 = 540.$

I. $x = 60 - y - z$ und $12.60 - 12y - 12z + 10y + 6z = 540.$

$720 - 2y - 6z = 540.$

$360 - y - 3z = 270$

$y = 90 - 3z. \quad \text{-----} \quad \alpha.$

und aus I. $x = 60 - 90 + 3z - z.$

$x = 2z - 30. \quad \text{-----} \quad \beta$

Soll nun y und x eine + ganze Zahl werden, so ist in α nothwendig $90 > 3z$; $30 > z$; und in β $2z > 30$, also $z > 15$ seyn.

Daher also wenn

$z =$ 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29.

so ist $x =$ 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20. 22. 24. 26. 28

und $y =$ 42. 39. 36. 33. 30. 27. 24. 21. 18. 15. 12. 9. 6. 3.

Das Gesetz d. Fortschreitung hier ist einleuchtend, da x von 2z abhängig ist, so z um 1 wächst so steigt x um 2 einheiten und umgekehrt da y von −3z abhängig ist so steigt es um 3 fallen.

Diese Aufgabe ist sehr gut und künstlich behandelt. Man könnte sie auch so auflösen. Wir nennen die Eimer x, y und 60−x−y so ist

$12x + 10y + 6(60 - x - y) = 60.9$

$6x + 4y = 180$

$y = \frac{180 - 6x}{4} = \frac{90 - 3x}{2} = 45 - x - \frac{x}{2}$

$-\frac{x}{2} = A$, giebt $x = -2A$

$y = 45 + 2A + \frac{2A}{2}$ $y = 45 + 3A$

d.h. die zu ansetzende Werth für A soll seyn −1, −2, −3 u.s.w. dann wird in diesen Fällen wird x eine ganze Zahl und positiv, A=0 darf nicht genommen werden weil es der Aufgabe widerspricht.

$A = -1 \quad x = 2 \quad y = 42 \quad z = 16$

$A = -2 \quad x = 4 \quad y = 39 \quad z = 17$ u.s.f.

die Werthe für A werden so lange angesetzt bis ein Werth von y oder z = 0 wird, was der Aufgabe widerspricht. z.B.

$A = -14, \quad x = 28 \quad y = 3 \quad z = 29$

$A = -15 \quad x = 30 \quad y = 0 \quad z = 30$

also läßt die Aufgabe 15 Auflösungen zu

2te Aufgabe.

Unter 2 Familien von denen die eine aus 7 die andere aus 11 Personen besteht, sollen 100 fl so vertheilt werden daß jede Person in jeder einzelnen Familie eine gleiche Anzahl voller Thaler bekömmt.

Bekömmt nun in der ersten Familie x u in der 2ten y.

so ist $7x + 11y = 100$

$$x = \frac{100-11y}{7} = 14 - y + \frac{2-4y}{7}$$

Wir können ihn nun unmittelbar den Bruch = einer ganzen Zahl A setzen, denn d den geringsten Werth von y ist = 1. würde der Bruch einen − Werth erhalten, wir müßten also einen − Werth für den Bruch annehmen.

$x = \frac{100-11y}{7}$; $\frac{2-4y}{7} = -A$; $-y = \frac{-7A-2}{4}$; $y = \frac{7A+2}{4}$.

$y = A + \frac{3A+2}{4}$; $\frac{3A+2}{4} = B$; $A = \frac{4B-2}{3}$; $= B + \frac{B-2}{3}$.

$A = B + \frac{B-2}{3}$. $\frac{B-2}{3} = C$; $B = 3C + 2$.

$B = 3C + 2$.

Nun ist also der Werth von x u y durch C bestimmt, u hieraus folgt:

C	B	A	y	x
= 0	2	2.	4.	8
= 1.	5.	6.	11.	−3.

Nun aber −3 zeigt nun daß diese Aufgabe nur ein bestimmtes einziges Resultat hat, welches aber bei unbestimmten Aufgaben selten der Fall ist. —.

Dies hat ist aber nicht nothwendig, indem es sich auch dem Lehrsatze ergeben muß So z. B.

$x = \frac{100-11y}{7} = 14 - y + \frac{2-4y}{7}$

$A = \frac{2-4y}{7}$ oder $-7A = -2 + 4y$

giebt $y = \frac{2-7A}{4} = -A + \frac{2-3A}{4}$

$\frac{2-3A}{4} = B$ oder $-2 + 3A = -4B$

giebt $A = \frac{2-4B}{3} = -B + \frac{2-B}{3}$

$\frac{2-B}{3} = C$ giebt $B = 2 - 3C$ die Werthe substituirt $A = -2 + 4C$

$y = 4 - 7C$

$x = 8 + 11C$

Hier ergiebt man daß für C nur 0 genommen werden kann denn C = 1 giebt für y − Werth, C = −1 giebt für x − Werth und daraus ersichtlich ist dieses der Aufgaben einzig bestimmt ist

Eine andere Auflösung dieser Aufg: ist folgende: Aus den 5 Gl: findet man folgende 4.

$5m+1=7n+6 \quad m=\frac{7n+5}{5}$

$5m+1=8p+1 \quad m=\frac{8p}{5}$

$5m+1=9q+5 \quad m=\frac{9q+4}{5}$

$5m+1=11r+8 \quad m=\frac{11r+7}{5}$

daraus ergeben sich drei Gl:

$7n+5=8p \quad n=\frac{8p-5}{7}$

$7n+5=9q+4 \quad n=\frac{9q-1}{7}$

$7n+5=11r+7 \quad n=\frac{11r+2}{7}$

daraus ergeben sich zwei

$8p-5=9q-1 \quad p=\frac{9q+4}{8}$

$8p-5=11r+2 \quad p=\frac{11r+7}{8}$

daraus die letzte Gl. von 2 Unb:

$9q+4=11r+7$

$q=\frac{11r+3}{9}=r+\frac{2r+3}{9}$

$r=\frac{9A-3}{2}=4A-1+\frac{A-1}{2}$

$A=2B+1$ substituirt

$r=9B+3$

$q=11B+4$

$p=\frac{9.11B}{8}+5$

$n=\frac{9.11B}{7}+5$

$m=\frac{9.11B}{5}+8$

woraus sich ergiebt daß für $B=0$ die Reihen m n etc. sich sogleich ergeben ... für B, da kein Bruch statt finden soll, bloß das 8.7.5 schon gezählt werden. —

3te Aufgabe.

Ein Offizier hat einige Soldaten, wenn er jedes Glied zu 5. Mann stellt, so bleiben ihm 1 Mann übrig, und zu 7 Mann so bleiben 6 übrig; und zu 8, so bleibt 1 Mann, und zu 9, so bleiben 5; und zu 11 in jedes Glied, so bleiben 8 Mann übrig. Wie viel Soldaten?

Die Anzahl d. Soldaten sey $= x$, und da auch die Zahl der Glieder unbekannt sind, so sollen auch diese durch einander folgende Gliederzahlen m. n. p. q. r. seyn, so ist daher:

$5m+1=x$; $7n+6=x$; $8p+1=x$; $9q+5=x$; $11r+8=x$

und hieraus ist

$m=\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}$; $n=\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$; $p=\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}$; $q=\frac{1}{9}x-\frac{5}{9}$; $r=\frac{1}{11}x-$

Die Anzahl der Glieder m. n. p. q. ist aber nothwendig eine ganze Zahl seyn, daher kann ich schließen

$m+n+p+q+r=y$. d. also auch $y=$ eine unbekannte ... Substitution von m n p ... daher:

	27720
$\frac{1}{5}x-\frac{1}{5}$	$5544x-5544$
$\frac{1}{7}x-\frac{6}{7}$	$3960x-23760$
$\frac{1}{8}x-\frac{1}{8}$	$3465x-3465$
$\frac{1}{9}x-\frac{5}{9}$	$3080x-15400$
$\frac{1}{11}x-\frac{8}{11}$	$2520x-20160$

$$\frac{18569x-68329}{27720}=y.$$ um die Auflösung ...

von Augen zu haben nennen wir $y = A$. und also

$$x = \frac{27720A + 68329}{18569} = A + 3 + \frac{9151A + 12622}{18569};$$

setzt man $\frac{9151A + 12622}{18569} = B$ so ist $A = \frac{18569B - 12622}{9151} = 2B - 1 + \frac{267B - 3471}{9151}$.

$$A = 2B - 1 + \frac{267B - 3471}{9151}; \qquad \frac{267B - 3471}{9151} = C; \quad B = \frac{9151C + 3471}{267} = 34C + 13 + \frac{73C}{267}$$

$$B = 34C + 13 + \frac{73C}{267}.$$

Da nun hierdurch eine [illegible] Zahlen nicht verkannt wie und in d. Anwendung häufig eintritt, wird hier auch $\frac{73C}{267}$ eine ganze Zahl seyn müssen mithin C also einen der mehrfachen Werthe des Nenners haben müssen. Man könnte zwar auch fortfahren, u. den Werth C als [illegible] betrachten, allein es wird hier zweckmäßiger seyn den Werth des Nenners 267 für C zu substituiren, u. offenbar kann man auch bei dem Nullfalle $C = 0$ anfangen.

C	B	A	x
0	13	25.	41.
267.	9164.	18594	27761.
534	18315.	37163.	55481.

4te Aufgabe.

Ein Bauer geht mit 100 fl zu Markte, dafür will er 100 Stück Vieh; Kühe, Schafe und Schweine kaufen. Eine Kuh kostet 10 fl ein Schwein 3 fl und ein Schaf ½ fl.

Wie viel erhält er von jeder Sorte?

Wenn er x Kühe, y Schweine und z Schafe hat, so ist:

Man vergleiche die Auflösung einer ähnlichen Aufgabe p. 235. Dieser aber ist vorzuziehen, da man zugleich die Grenzen bestimmen kann innerhalb welcher sich der Werth für z bewegen muß, um für z, y, x ganze und positive Werthe zu geben.

$$\text{I}\quad x + y + z = 100.$$

$$\text{II}\quad 10x + 3y + \tfrac{1}{2}z = 100.$$

$$x = 100 - y - z.$$

$$1000 - 10y - 10z + 3y + \tfrac{1}{2}z = 100.$$

$$1000 - 7y - \tfrac{19}{2}z = 100.$$

$$7y = 900 - \tfrac{19}{2}z.$$

$$\underline{y = \frac{1800 - 19z}{14}} \text{ und in I. } \quad \ldots\ldots \quad \alpha$$

$$x = 100 - \frac{1800 - 19z}{14} - z.$$

$$x = \frac{1400 - 1800 + 19z - 14z}{14}$$

$$\underline{x = \frac{5z - 400}{14}}; \quad \ldots\ldots \quad \beta.$$

da y u. x in α u. β + ganze Zahlen seyn müssen, so muß nothwendig in α. $1800 > 19z$ seyn. u. $z \not> \frac{1800}{19} =$ $z \not> 94\frac{14}{19}$; und in β. $5z > 400$; $z > 80$. so daß also d. Werth zwischen 81 und 94 liegt.

$$y = \frac{1800 - 19z}{14} = 128 - z + \frac{8 - 5z}{14}$$

$$\frac{8 - 5z}{14} = A;\quad z = \frac{14A + 8}{5} = 2A + 1 + \frac{4A + 3}{5}.$$

$$\frac{4A + 3}{5} = B,\quad A = \frac{5B - 3}{4} = B + \frac{B - 3}{4}$$

$$\frac{B - 3}{4} = C;\quad B = 4C + 3.$$

$$z = 2A + 1 + \frac{4A + 3}{5}.$$

$$A = B + \frac{B - 3}{4}$$

$$B = 4C + 3.$$

und daher bei

C.	B.	A.	z.	y.	x
0	3.	3.	10.	115.	−25
1	7.	8.	24.	96.	−20
2	11	13	38	77	−15
3	15	18	52	58	−10
4	19	23	66	34	−5
5	23	28	80	20	− 0 −
6	27	33	94	1	+5
7	31	38	108	−18	+10
8	35	33	122	−37	+15.

Hier sieht man leicht daß nur die Werthe $z = 94$ $y = 1$. $x = 5$, die wahren seyn können, weil aus den andern Werthen und negative Werthe entspringen.

Es frägt sich wie man die Werthe dieser eigentlich bedeutenden Auflösung hätte unmittelbar finden können; und dies konnte man aus ferner abgeleiteten Schlüssen der Grenzen in welchen A, B, & C liegen, wieder sie geschlossen hätte.

Es müßte $z = \frac{14A+8}{5} < 94\frac{14}{19}$ & $z = \frac{14A+8}{5} > 80$.

$$A < \frac{5(94\frac{14}{19})-8}{14} \qquad A > \frac{400-8}{14}$$

$$A < 33\frac{5}{19} \qquad A > 28$$

Demnach $A = \frac{5B-3}{4} < 33\frac{5}{19}$ & $\frac{5B-3}{4} > 28$.

$$B < \frac{4(33\frac{5}{19})+3}{5} \qquad B > \frac{4.28+3}{5}$$

$$B < 27\frac{6}{95} \text{ und} \qquad B > 23$$

ferner $B = 4C+3 < 27\frac{6}{95}$ und $4C+3 > 23$.

$$C < 6\frac{3}{190} \qquad C > 5.$$ Da also zwischen

$6\frac{3}{190}$ und d. Zahl 5, [illegible] muß, so kann [illegible] ganze Zahl aus 6 folgen.

5te Aufgabe.

Ein Münzmeister hatte einige Stücke Silber jedes eine Mark schwer an Gewicht. einige sind 14 löthig, andere 11 löthig und andere 9 löthig. Er soll eine Masse 30 Mark schwer verarbeiten, die 12 löthig ist, wie viel hat er von jeder Sorte zu nehmen.

I $x + y + z = 30.$

II $14x + 11y + 9z = 12.30.$

$x = 30 - y - z.$

$14.30 - 14y - 14z + 11y + 9z = 360.$

$60 = 3y + 5z.$

$y = 20 - \frac{5}{3}z.$

$x = 10 + \frac{2}{3}z$

Da nun x u. y ganze Zahlen vorkommen sollen, so kann z nur eine durch 3 theilbare Größe genommen werden. u. ~~[illegible]~~ aber wenn y + bleiben soll $20 > \frac{5}{3}z$ (also $z < 12.$ und hieraus sind nur 3 Auflösungen.

für $z = 3. = 6. — 9;$
$y = 15. = 10. — 5;$
$x = 12. = 14. — 16;$

Die andere Auflös. ist folgende

x
y
$30-x-y$ $\quad 14x + 11y + 270 - 9x - 9y = 360$

$5x + 2y = 90$

$y = \frac{90 - 5x}{2} = 45 - 2x - \frac{x}{2}$

$x = -2A$
$y = 45 + 5A$
$z = -15 - 3A$

Es muß dieser A negativ genommen werden und zwar derart mit $5A < 45$ oder $A < 9$ und $-3A > -15$ oder $A > 5$ daher kann A nur $= -6$
$= -7$
$= -8$

woraus sich die Werthe für x und y successive ergeben

$A=-6 \quad x=12 \quad y=15 \quad z=3$
$A=-7 \quad x=14 \quad y=10 \quad z=6$
$A=-8 \quad x=16 \quad y\ 5 \quad z=9$

6te Aufgabe.

Jemand hat 3 Sorten Wein von der ersten kostet das Quart 24 gr von d. 2ten 18 gr von d. 3ten Sorte 12 gr. er will sie so mischen, daß er das Quart für 15 gr geben kann. Wie viel von jeder Sorte?

Da die Mischung ein Quart werden soll, so müssen hier nothwendig Theile des Quarts also Brüche zum Vorschein kommen.

I $x + y + z = 1$.

II $24x + 18y + 12z = 15$.

$x = 1 - y - z$.

$24 - 24y - 24z + 18y + 12z = 15$.

$9 - 12z = 6y$.

$y = \frac{3}{2} - 2z$ und

$x = z - \frac{1}{2}$

es ist also $\frac{3}{2} > 2z$; $z < \frac{3}{4}$ und $z > \frac{1}{2}$.

Also alle Brüche die zwischen $\frac{3}{4}$ u. $\frac{1}{2}$ liegen also ∞ thun dieser Aufgabe genüge. die z. B.

$z = \frac{5}{8}$ so ist $y = \frac{2}{8}$; $x = \frac{1}{8}$ Summa 1.

$24 \cdot \frac{1}{8} + 18 \cdot \frac{1}{4} + 12 \cdot \frac{5}{8} = 3 + 4\frac{1}{2} + 7\frac{1}{2} = 15$.

Es giebt nun auch unbestimmte Aufgaben, welche bey der Auflösung auf Gleichungen höherer Grade führen,

x

y

$1 - x - y$

$24x + 18y + 12 - 12x - 12y = 15$

$12x + 6y = 3$

$4x + 2y = 1$

$y = \frac{1-4x}{2} = \frac{1}{2} - 2x$

$x = a$

$y = \frac{1}{2} - 2a$

$z = +\frac{1}{2} + a$

Da $x + y + z = 1$ seyn muß, so muß a ein ächter positiver Bruch seyn und zwar < als $\frac{1}{2}$ wegen z und kleiner als $\frac{1}{4}$ wegen y.

Außerdem $x = \frac{2a}{2}$

$y = \frac{2-4a}{2}$

$z = \frac{1+2a}{2}$

so muß $4a < 2$ also $a < \frac{1}{4}$,

ebenso $2a < 1$ also $a < \frac{1}{2}$

Es genügen also alle Brüche unter $\frac{1}{4}$ z. B. $\frac{1}{5}$

$x = \frac{1}{5}$

$y = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{5-4}{10} = \frac{1}{10}$

$z = \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{5+2}{10} = \frac{7}{10}$

$\frac{24}{5} + \frac{9}{5} + \frac{42}{5} = \frac{75}{5} = 15$ Gr.

vorzüglich zu quadratischen Gleichungen. z.B.

7te Aufgabe

Es sollen 2 Zahlen von der Beschaffenheit gefunden werden, daß die Summe ihrer Quadrate wieder ein Quadrat wird. also:

$x^2+y^2=z^2$

und da die Summe zweier Potenzen nicht, wohl aber die Differenz in Factoren zu zerlegen ist, wird man sie verwandeln:

$$z^2-x^2=y^2$$

$$y^2=(z+x)(z-x)$$

Kann man nun die Summe und Differenz der Größen einzeln bestimmen, so wird man daraus auch leicht die Größen selbst finden können. Da nun aber das Produkt von Summe und Differenz ein Quadrat werden soll, und man keine weitern Bestimmungen hat, so wird man für die einzelnen Factoren irgend eine Supposition annehmen dürfen, wenn es nur in der Folge nur ein Mittel ist die Größe zu dadurch bestimmen; so setze also

$$z+x=ny \text{. so ist}$$

$$\frac{ny(z-x)=y^2}{z-x=\frac{y}{n}}.$$

da nun alle hier vorkommende Größen ganze Zahlen

sind,

ist nothwendig die Differenz durch eine ganze Zahl seyn theil-
y durch n theilbar. Setzen wir daher $\frac{y}{n} = m$; $y = mn$.

so ist:

$$z + x = n \cdot mn = mn^2$$
$$z - x = m.$$

Jetzt hat man Summe und Differenz beyder unbekannten Ausdrücke, wodurch ist:

$$z\ \cancel{x} = \frac{(x+z)+(z-x)}{2} = \frac{mn^2+m}{2} = \frac{m(n^2+1)}{2}$$

$$x\ \cancel{z} = \frac{(x+z)-(z-x)}{2} = \frac{mn^2-m}{2} = \frac{m(n^2-1)}{2}$$

So sind nun die Größen ~~xy~~ xz durch m und n unabhängig ausgedrückt, und die einzige Bedingung nur ist hier, daß beyde Ausdrücke durch 2 theilbar seyn müssen. Nimmt man nun für m eine gerade Zahl an, so ist dieß immer d. Fall. Ist m ungerade so muß n auch ung. seyn; denn dann wird $n^2 \pm 1$ wieder gerade, u. also 2 theilbar.

Setzt man daher $m = 1$.

$n =$	3.	5.	7.	9.	11.	13.
so ist $y =$	3.	5.	7.	9.	11	13.
$x =$	4.	12.	24.	46.	60	84.
$z =$	5.	13.	25.	41	61.	85 …

Nimmt man dagegen $m = 2$ so wird.

$n =$	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8
$y =$	2.	4.	6.	8.	10.	12.	14.	16.
$x =$	0,	3.	8.	15	24	35	48	63
$z =$	2.	5.	10	17	26	37	50	65 –

~~Dieser~~ Vergleichen vorausgesandt Zahlen pflegt man auch noch ein Geschlechtszeichen Zahlen deutlich zu nennen, und den ersten Fall $m=1$ schreibt man den Geschlechtsnamen den andern aber $m=2$ den Platz als Erfindung zu.

Durch Beyspiel wird die Behandlung [illegible] Aufgaben welche sich zu schönen Gleichungen natürlich [illegible] [illegible].

Die merkwürdigsten d. Proportionen. (aus Vorst).

§274. Lehrsatz

$a:b = c:d; = an:bn = c:d; = an:b = cn:d; = an:bn = cn:dn;$

§276. Lehrsatz

$a:ae = b:be; = a^n : a^ne^n = b^n : b^ne^n; = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{ae} = \sqrt[n]{b} : \sqrt{be};$

§277. Lehrsatz

I. $a:ae = d:de; \ (a \pm ae):(d \pm de) = a:d$ oder wie $ae:de$ d. h. homologen Glieder.

d. h. die Summe od. Diff. des 1. Verhältniß, zur Summe d. Diff. d. 2. V. = ein Paar homologe Glieder.

II. $a:ae = f:fe; \ (a \pm f):(ae \pm fe) = a:ae$ od. $f:fe$.

d. h. die Summe d. Diff. d. homologen vordern Glieder, zur Summe od. Diff. d. homologen hintern Glieder, wie die Glieder eines Verhältnisses zu einander.

§279. Lehrsatz

Eine gegebene Zahl N nach den Verhältnissen der Zahlen $a:b:c:d:f$ zu theilen.

$(a+b+c+d+f):(\overbrace{x+y+z+p+q}^{N}) = a:x = b:y = c:z = d:p = f:q.$

§278. Zusatz

$a:b = c:d = n:m = p:q \ldots$

$(a+c+n+p):(b+d+m:q) = a:b = c:d = n:m = p:q \ldots$

§280. Lehrsatz

$$\begin{array}{l} a:b = m:n \\ c:d = f:g \\ k:h = q:p \\ \hline ack:bdh = mfq:ngp \end{array}$$

d. h.

$$\begin{array}{l} a:ax = n:nx. \\ b:by = m:my \\ c:cz = o:oz \\ \hline abc:abcxyz = nmo:nmoxyz. \end{array}$$

Zusatz Wenn

$$\begin{array}{l} a:b = n:m \\ b:f = p:q. \\ \hline a:f = np:mq \end{array}$$

wiederum folgt $a:f$. hier und die Verhältnisse $n:m$ u. $p:q$ zusammengesetzt, ist $a:f = (n:m)+(p:q)$

ist $n:m = p:q$ so ist $a:f = (n:m)+(n:m) = n^2:m^2 = (n:m)2$.

3) Wenn $a:b = (n:m)p$ d. h. $a:b = n^p:m^p$, oder $\sqrt[p]{a}:\sqrt[p]{b} = n:m$ d. h. $n:m = \frac{1}{p}(a:b)$

4. Bey stetigen Propo. $a:b = b:d$ ist $a^2:b^2 = a:d$; oder $a:d = (a:b)2$

§ 283 Lehrsatz

$a : b = c : n$ d. h. wenn man bey 2 Proportionen die Glieder d. einen durch d. gleichnamigen Glieder d. andern dividirt

$f : g = h : d.$

$\frac{a}{f} : \frac{b}{g} = \frac{c}{h} : \frac{n}{d}$

§ 284. Lehrsatz

Bey stetiger Proport. ist die 3te Potenz d. mittl. Gliedes = dem Producte aus allen 3 Gliedern:

$a : b = b : c$ so ist $b^3 = abc$. denn.

$a : ax = ax : ax^2$, so ist $a . ax . ax^2 = a^3x^3 = (ax)^3$;

$8 : 4 = 4 : 2 = 4^3 = 64 = 8 . 4 . 2$.

$\underline{6o}\ \ \underline{4.4} = \underline{8.2}$:

a zatem $\underline{4.4}.4 = \underline{8.2}.4$.

Zadanie Dyof.:

X wołów, y krów, z cieląt kupię za 100 Dukt.: wiedząc że jest 100 sztuk bydła i cielę płacę po $\frac{1}{2}$, krowę po 5# woła po 10#

$$10x + 5y + \frac{z}{2} = 100$$
$$x + y + z = 100$$

$x = \cancel{10 - \frac{y}{2} - \frac{z}{20}} = 100 - y - z$

$x = 100 - y - z$ $\quad 200 - 10y - z = 2000 - 20y - 20z$

$10y + 19z = 1800$

Kładę na $x = 1.$ $\quad 10 + 5y + \frac{z}{2} = 100$

$z = 90$ $\quad 1 + y + z = 100$ $\quad 10 + 5.99 - 5z + \frac{z}{2} = 100$

$y = 9.$ $\quad y = 99 - z$ $\quad -90 + 5.99 = \frac{9z}{2}$

$x = 2$ $\quad -2.10 + 10.11 = 9.10 = z$

$20 + 5y + \frac{z}{2} = 100$: $y = 16 - \frac{z}{10}$ $\quad \cancel{3x - x = 1000}$

$2 + y + z = 100$ $\quad 2 + 16 - \frac{z}{10} + z = 100$ $\quad \cancel{+z = -964}$

$20 + 16 - z + 10z = 1000$

$9z = \frac{964}{9}\ 107\frac{1}{3}$

x
y
$100-x-y$

$$\frac{x}{2}+5y+1000-10x-10y=100$$

$$\frac{19x}{2}+5y=900$$

$$x=\left(\frac{900-5y}{19}\right)2=\frac{1800-10y}{19}=\frac{1800-1800+190C}{19}$$

$$y=\frac{1800-19A}{10}=180-A-\frac{9A}{10}=180-10C-\frac{90C}{10}$$

$$A=\frac{-10B}{9}=-B-\frac{B}{9}=9C+C$$

$$B=-9C$$

$$A=10C$$

$$y=180-19C$$

$$x=10C$$

$$\begin{array}{r} 17.3 \\ 45\;180\;152 \\ 114 \\ \hline 66 \end{array}$$

C=1 ist y zu groß
=2 do
=3 do
=4
=5 ist y=85 x=50 z zu groß
=6 =66 =60 z zu groß 3
=7 =47 =70 z do
=8 =28 =80 z do
=9 =9 90 z = 1
=10 würde y = – und eben so für die folg: Werthe die > 9 sind daher die Aufgaben nur 1 Auflösung hat.

BIBLIOTH: UNIV. JAGELLONICAE